

Complementi sui numeri naturali

I numeri naturali

Da un punto di vista ingenuo si può pensare ai naturali semplicemente come ad una sequenza infinita $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Definition 1 *I numeri naturali sono una tripla $\langle \mathbb{N}, 0, \sigma \rangle$ t.c.*

assioma 1: \mathbb{N} è un insieme e 0 è un elemento privilegiato di \mathbb{N} detto zero;

assioma 2: $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è una operazione unaria iniettiva su A ;

assioma 3: $0 \notin \text{Im}(\sigma)$;

assioma 4: se $P \subseteq \mathbb{N}$ e valgono le seguenti proprietà:

i) $0 \in P$;

ii) $\forall n \in \mathbb{N}.(n \in P \Rightarrow \sigma(n) \in P)$

allora $P = \mathbb{N}$.

Gli assiomi dei numeri naturali sono dovuti a G.Peano. In particolare l'assioma 4 è detto *assioma di induzione*.

Tramite l'assioma di induzione possiamo provare proprietà sui numeri naturali.

Una proprietà P sui naturali corrisponde ad un sottoinsieme di $P \subseteq \mathbb{N}$. La notazione $P(x)$ altro non è che un'abbreviazione per $x \in P$.

L'osservazione appena fatta permette di riformulare l'assioma di induzione come principio per provare proprietà sui naturali.

principio di induzione:

Sia P una proprietà su \mathbb{N} :

se $P(0)$ e $\forall n \in \mathbb{N}.(P(n) \Rightarrow P(\sigma(n)))$ allora $\forall m \in \mathbb{N}.P(m)$.

Example 2 *Dimostriamo per induzione che la proprietà $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{i=n} 2i + 1 = (n + 1)^2$ è vera per ogni n .*

caso base: *se $n = 0$ la proprietà è vera in quanto $\sum_{i=0}^{i=0} 2i + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = (0 + 1)^2$;*

passo induttivo: *supponiamo che $P(k)$ sia vera, ovvero $\sum_{i=0}^{i=k} 2i + 1 = (k + 1)^2$.
 $\sum_{i=0}^{i=k+1} 2i + 1 = \sum_{i=0}^{i=k} 2i + 1 + (2(k + 1) + 1) = (k + 1)^2 + 2(k + 1) + 1 = ((k + 1) + 1)^2$,
e quindi $P(k + 1)$ è vera.*

Definizioni per ricorsione (primitiva)

Una prassi usuale in informatica è quella di dare definizioni per ricorsione. Il caso più semplice è quello della definizione per induzione di funzioni.

Theorem 3 *Sia $h : \mathbb{N} \times A \rightarrow A$ e $c \in A$. Esiste (ed è unica) una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ t.c.:*

1. $f(0) = c$
2. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma(n)) = h(n, f(n))$.

Dimostrazione

Esistenza di f : sia Ω la classe di tutti gli insiemi $Z \subseteq \mathbb{N} \times A$ t.c. $(0, c) \in Z$ e $(n, x) \in Z \Rightarrow (\sigma(n), h(n, x)) \in Z$; chiamiamo *soddisfacenti* tali insiemi.

E' immediato osservare che Ω non è vuoto.

Sia f l'intersezione di tutti gli elementi di Ω . L'insieme f è ovviamente soddisfacente ed è contenuto in ogni insieme soddisfacente.

Dimostriamo per induzione che : per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste esattamente un $a \in A$ t.c. $(n, a) \in f$ (ovvero f è una funzione).

caso base: sappiamo che $(0, c) \in f$. Supponiamo che $(0, d) \in f$ con $d \neq c$. Allora $f - \{(0, d)\}$ sarebbe sempre soddisfacente e sarebbe contenuto propriamente in f , impossibile.

passo induttivo: supponiamo che la proprietà valga per un generico naturale i , ovvero che esiste unico w t.c. $(i, w) \in f$. Per costruzione di f deve valere che: $(\sigma(i), h(i, w)) \in f$. Supponiamo ora che esista un elemento $e \neq h(i, w)$ t.c. $(\sigma(i), e) \in f$. L'insieme $f - \{(\sigma(i), e)\}$ è soddisfacente e sarebbe strettamente contenuto in f , impossibile.

Notiamo infine che la funzione f essendo soddisfacente soddisfa banalmente i punti (1.) e (2.) del teorema.

Unicità di f : supponiamo che esistano due funzioni f_1 e f_2 verificanti i punti (1.) e (2.) del teorema. Dimostriamo per induzione che $f_1 = f_2$.

caso base: $f_1(0) = f_2(0)$ per definizione. Supponiamo che per un generico naturale i , $f_1(i) = f_2(i)$.

passo induttivo: Applicando il punto due abbiamo che $f_1(\sigma(i)) = h(i, f_1(i)) = h(i, f_2(i)) = f_2(\sigma(i))$.

Corollary 4 Sia $g : A \rightarrow A$ e $c \in A$. Esiste (ed è unica) una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ t.c.:

1. $f(0) = c$
2. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma(n)) = h(f(n))$.

Dimostrazione

Sia $h : \mathbb{N} \times A \rightarrow A$ definita da $h(x, y) = g(y)$, si osservi che esiste unica $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ t.c.:

1. $f(0) = c$
2. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma(n)) = h(n, f(n)) = g(f(n))$. **QED**

Example 5 Sia $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ t.c. $h(x, y) = \sigma(x) \cdot y$. Per il teorema appena dimostrato esiste un'unica funzione f t.c.:

$$f(0) = 1$$

$$f(\sigma(n)) = h(n, f(n)).$$

Che funzione è f ?

La somma di naturali

La somma di due numeri naturali è ricorsivamente definita da:

$$m + 0 = m$$

$$m + \sigma(n) = \sigma(m + n).$$

La definizione rientra perfettamente nello schema delle definizioni per ricorsione (primitiva): per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo la seguente funzione:

$$s_m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$s_m(0) = 0$$

$$s_m(\sigma(n)) = \sigma(s_m(n));$$

Definiamo $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nel modo seguente: $\sigma(n, m) = s_n(m)$.

Esercizio: dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze ($m, n \in \mathbb{N}$):

1. $0 + n = n$;
2. $\sigma(m + n) = \sigma(m) + n$;
3. $m + n = n + m$;

Il prodotto di naturali

Il prodotto di due numeri naturali è ricorsivamente definita da:

$$m \times 0 = 0$$

$$m \times \sigma(n) = m + (m \times n).$$

Esercizio: dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze ($m, n \in \mathbb{N}$):

1. $0 \times n = 0$;

2. $m \times n = n \times m$;

Altre definizioni ricorsive

Sommatorie:

1. $\sum_{i=0}^0 E_i = E_0;$
2. $\sum_{i=0}^{\sigma(n)} E_i = (\sum_{i=0}^n E_i) + E_{\sigma(n)};$

Produttorie:

1. $\prod_{i=0}^0 E_i = E_0;$
2. $\prod_{i=0}^{\sigma(n)} E_i = (\prod_{i=0}^n E_i) \times E_{\sigma(n)};$

Unioni finite:

1. $\bigcup_{i=0}^0 E_i = E_0;$
2. $\bigcup_{i=0}^{\sigma(n)} E_i = (\bigcup_{i=0}^n E_i) \cup E_{\sigma(n)};$