# ESERCIZIO

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) Calcolare la norma infinito del residuo della prima iterata del metodo di Jacobi:

È $\underline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/5 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ per cui $\underline{r}^{(1)} = \underline{b} - A\underline{x}^{(1)}$ diventa

$$\underline{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/5 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{9}{5} \\ 2\cdot\frac{3}{2} + 5\cdot\frac{9}{5} + 2\cdot\frac{3}{2} \\ 2\cdot\frac{9}{5} + 4\cdot\frac{3}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18/5 \\ -6 \\ -18/5 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\|\underline{r}^{(1)}\|_\infty = \max\left( \left|-\frac{18}{5}\right|, \left|-6\right|, \left|-\frac{18}{5}\right| \right) = 6$$

d) Calcolare le matrici di iterazione di Jacobi e Gauss-Seidel e trovare il raggio spettrale di Gauss-Seidel.

JACOBI $\quad A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow (L + D + U)\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow$

$$D\underline{x} = -(L+U)\underline{x} + \underline{b} \Rightarrow$$

$$\underline{x} = -D^{-1}(L+U)\underline{x} + D^{-1}\underline{b} \Rightarrow$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{\boxed{-D^{-1}(L+U)}}_{E_J}\,\underline{x}^{(k)} + \underbrace{\boxed{D^{-1}\underline{b}}}_{q}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{E_J} \qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{q_J}$$

Devo calcolare $E_J$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora è

$$E_J = - \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -2/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>GAUSS-SEIDEL</u> $\quad A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow (L + D + U)\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow$

$$(L+D)\underline{x} = -U\underline{x} + \underline{b} \Rightarrow$$

$$\underline{x} = -(L+D)^{-1} U \underline{x} + (L+D)^{-1} \underline{b}$$

$$\underline{x}^{(n+1)} = \underbrace{\boxed{-(L+D)^{-1} U}}_{E_{GS}} \underline{x}^{(n)} + \underbrace{\boxed{(L+D)^{-1} \underline{b}}}_{q_{GS}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcolo $(L+D)^{-1}$:

$$\left( L + D \,\middle|\, I_3 \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1/5 & -2/5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/20 & -1/10 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$= (L+D)^{-1}$$

Perciò è

$$E_{GS} = -(L+D)^{-1}U = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 1/10 & -1/5 & 0 \\ -1/20 & 1/10 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Calcolo gli autovalori di $E_{GS}$ che sono le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = |E_{GS} - \lambda I_3| = \left| \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & -1/10 & 1/5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -\lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}-\lambda & -\frac{2}{5} \\ 0 & -1/10 & \frac{1}{5}-\lambda \end{pmatrix} \right| =$$

sviluppo il determinante rispetto alla 1ª colonna

$$= -\lambda \cdot \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{5}-\lambda & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5}-\lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$= -\lambda \left[ \left(\frac{1}{5}-\lambda\right)\left(\frac{1}{5}-\lambda\right) - \left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) \right] =$$

$$= -\lambda \left[ \cancel{\frac{1}{25}} - \frac{2}{5}\lambda + \lambda^2 - \cancel{\frac{1}{25}} \right] =$$

$$= -\lambda^2 \left( \lambda - \frac{2}{5} \right)$$

Perciò gli autovalori di $E_{GS}$ sono

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{2}{5}$$

Sono in modulo TUTTI minori di 1, come deve essere perché il metodo di Gauss-Seidel è convergente (punto (a)).

Il raggio spettrale di $E_{GS}$ è

$$\rho(E_{GS}) = \max\left( |0|, |0|, \underbrace{\left|\frac{2}{5}\right|}_{\text{modulo!}} \right) = \frac{2}{5} = 0.4$$

e) Stimare il numero di iterazioni necessarie per avere

$$\frac{\| e^{(k)} \|}{\| e^{(0)} \|} < 10^{-6}$$

Ricordiamo che $\| e^{(k)} \| \approx [\rho(E_{GS})]^k \| e^{(0)} \|$ da cui segue

$$\frac{\| e^{(k)} \|}{\| e^{(0)} \|} \approx \boxed{[\rho(E_{GS})]^k \underset{\text{impongo}}{<} 10^{-6}}$$

$\Downarrow$

risolvo rispetto a $k$

Ho

$$\left[\rho(E_{GS})\right]^k < 10^{-6} \implies k\left(\log_{10}\left(\rho(E_{GS})\right)\right) < -6 \implies$$

$\rho(E_{GS}) < 1$ $\implies$ $< 0$

INVERTO

$$k > \frac{-6}{\log_{10}\left(\rho(E_{GS})\right)} = \frac{-6}{\log_{10}\left(2/5\right)} = 15.08\ldots$$

per cui prendo $\boxed{k = 16}$.

ESERCIZIO Quanti intervalli servono per calcolare

$$I = \int_{1/10}^{1} \frac{1}{x}\, dx$$

utilizzando il metodo di Cavalieri-Simpson composto con un errore inferiore a $10^{-6}$?

Ricordiamo che l'errore con $m$ intervalli è

$$E_{CS,c}^{(m)} = -\frac{(b-a)^5}{2880\, m^4} f^{(4)}(\xi)$$

con $\xi$ punto opportuno di $[a,b]$.

Ho

$$a = \frac{1}{10}, \quad b = 1, \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$f^{(1)}(x) = -1\cdot x^{-2}$ ; $f^{(2)}(x) = 2\cdot x^{-3}$ ; $f^{(3)}(x) = -6\,x^{-4}$ ;

$f^{(4)}(x) = 24\,x^{-5}$ .

Imponiamo che una maggiorazione dell'errore sia minore di $10^{-6}$:

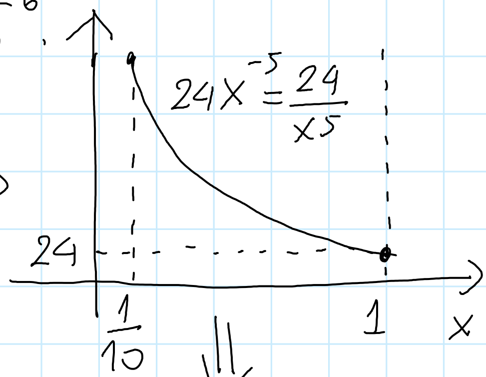
$$\left| E^{(m)}_{cs,c} \right| = \left| -\frac{(b-a)^5}{2880\, m^4} f^{(4)}(\xi) \right| = \frac{(b-a)^5}{2880\, m^4} \left| f^{(4)}(\xi) \right| \le$$

impongo

$$\le \frac{(b-a)^5}{2880\, m^4} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right| < 10^{-6}$$

$\Downarrow$ ricavo m .

$$\frac{\left(1-\frac{1}{10}\right)^5}{2880\, m^4} \cdot \max_{x\in[\frac{1}{10},1]} \left| 24\,x^{-5} \right| < 10^{-6} .$$




$\Downarrow$

$$\max_{x\in[\frac{1}{10},1]} \left| 24\,x^{-5} \right| = \frac{24}{(1/10)^5} = 24\cdot 10^5$$

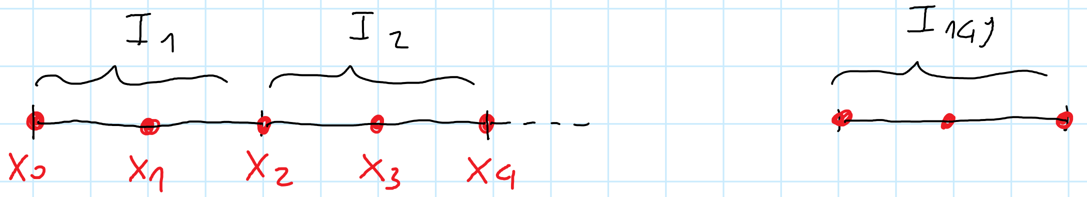
Perciò

$$\frac{9^5}{\cancel{10^5}\cdot 2880\cdot m^4} \cdot 24\cdot \cancel{10^5} < 10^{-6} \Rightarrow$$

$$\sqrt[4]{9^5\, 24\ \dots}$$

$$m > \sqrt[4]{\frac{9^5 \cdot 24}{2880 \cdot 10^{-6}}} = 148,9$$

per cui servono 149 intervalli (in ciascuno dei quali applico Cavalieri-Simpson aggiungendo il punto centrale).




ESERCIZI PROPOSTI

1) Calcolare la retta ai minimi quadrati associata ai punti
$(1,2)$ ; $(2,3)$ ; $(4,0)$ ; $(6,-1)$

2) Calcolare il polinomio che interpola i dati precedenti utilizzando le differenze divise.

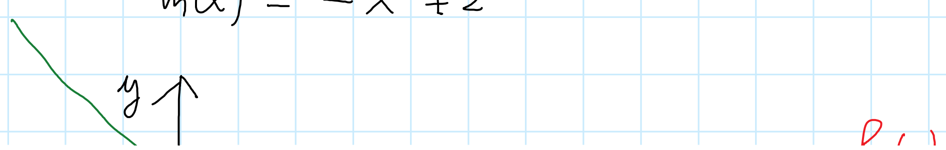
3) Stabilire l'ordine di convergenza del metodo di Newton applicato per il calcolo della radice di

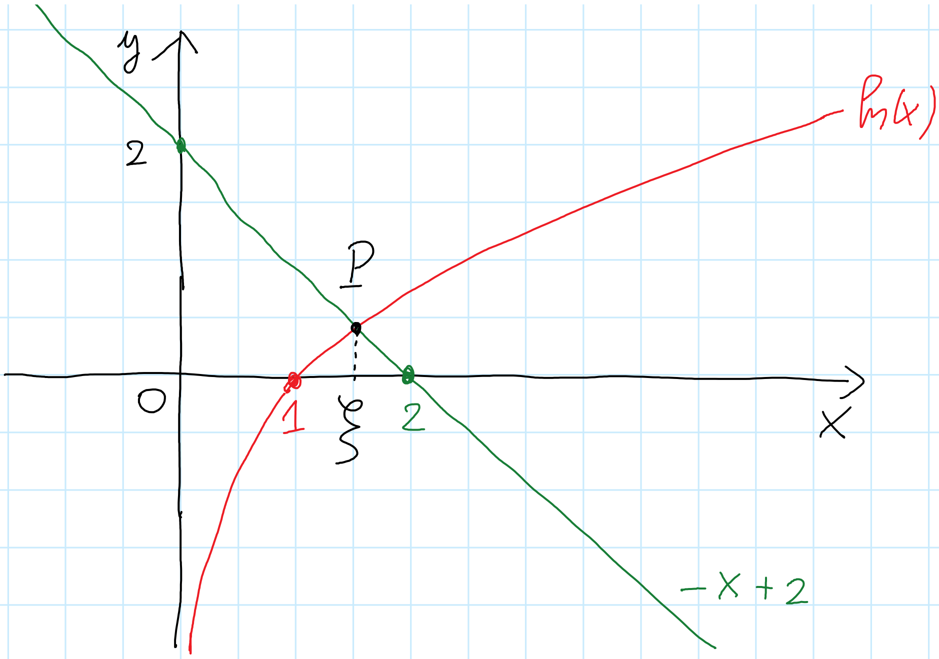
$$f(x) = \boxed{\ln(x) + x - 2} = 0$$

Trovare, se esiste, un punto $x_0$ tale che sia possibile applicare il metodo di Newton per calcolare $x_1$ ma non sia più possibile proseguire (ossia, non è possibile calcolare $x_2$ a partire da $x_1$).

La radice di $f$ si trova facilmente per via grafica:

$$\ln(x) = -x + 2$$






Perciò è

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi) = \frac{1}{\xi} + 1 \neq 0$$

$\Downarrow$

ordine almeno 2

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f''(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} \neq 0$$

$\Downarrow$

ordine è esattamente 2.

**ESERCIZIO** Scrivere una function Matlab che riceve in ingresso due vettori v1 e v2 di uguale lunghezza e restituisce in uscita la prima posizione k ed il valore v1(k) tale che v1(k) > v2(k). Nel caso non esista k, restituisce k e v1(k) vuote.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| v1 | 0 | 2 | 5 | 4 |
| v2 | 1 | 2 | 2 | 1 |

$\Longrightarrow \quad k = 3, \quad v1(k) = 5$

$$v_1 \; \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad v_2 \; \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad k = [\,], \quad v1(k) = [\,]$$

DEVE ESSERE CODICE FUNZIONANTE!

ESERCIZIO

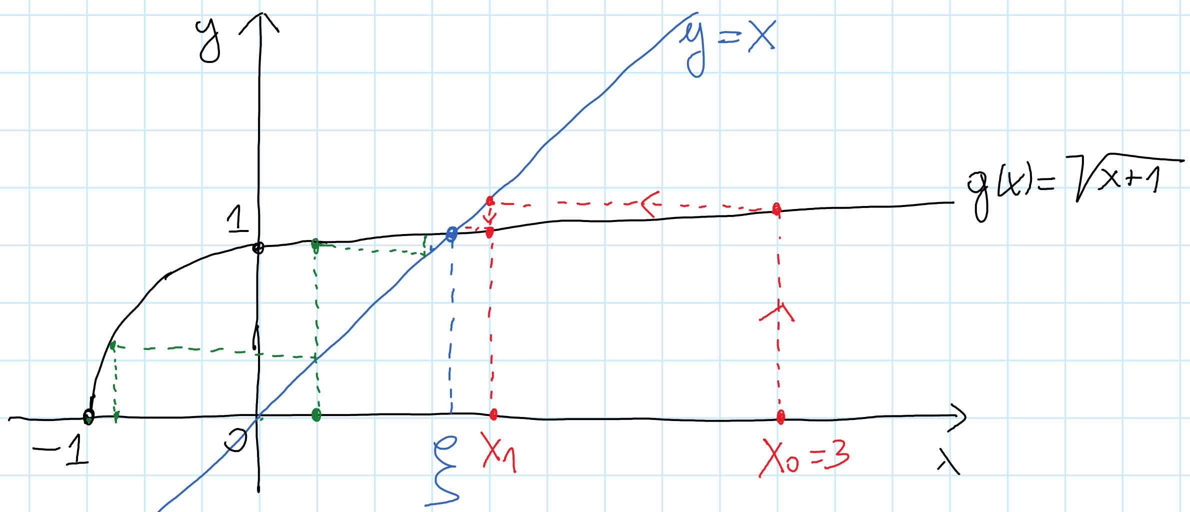
a) $x_{k+1} = \sqrt{x_k + 1}$

Dimostrare che esiste un unico punto fisso, calcolarlo e dire se il metodo converge a partire da $x_0 = 3$

Sia $\xi$ il punto fisso; allora è

$$\xi = \sqrt{\xi + 1} \iff \xi^2 - \xi - 1 = 0 \iff$$

$$\xi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \leftarrow \text{OK} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$




Successione monotona decrescente che approssima $\xi$ dall'alto.

Analiticamente, per vedere se la successione di punto fisso converge (partendo vicino a $\xi$) posso guardare $g'(\xi)$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow g'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi+1}} = \frac{1}{2\xi} =$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{5}} \simeq 0{,}31$$

Essendo $|g'(\xi)| < 1$ il metodo è localmente convergente.

b) È possibile scegliere $x_0$ in modo che la successione $x_k$ sia monotona crescente e convergente a $\xi$?

Sì, dalla figura vediamo che basta, ad esempio, prendere $x_0 = 1/2$.

c) Calcolare le prime due iterazioni ed i relativi errori con $x_0 = 3$.

$x_0 = 3 \quad ; \quad |e_0| = |\xi - x_0| = 1.382$

$x_1 = g(x_0) = \sqrt{x_0 + 1} = \sqrt{3+1} = 2 \quad ; \quad |e_1| = |\xi - x_1| = 0.382$

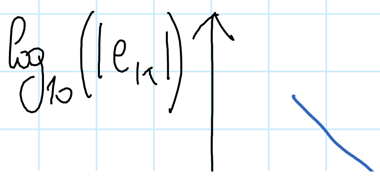
$x_2 = g(x_1) = \sqrt{x_1 + 1} = \sqrt{2+1} = 1.732 \quad ; \quad |e_2| = |\xi - x_2| = 0.114$

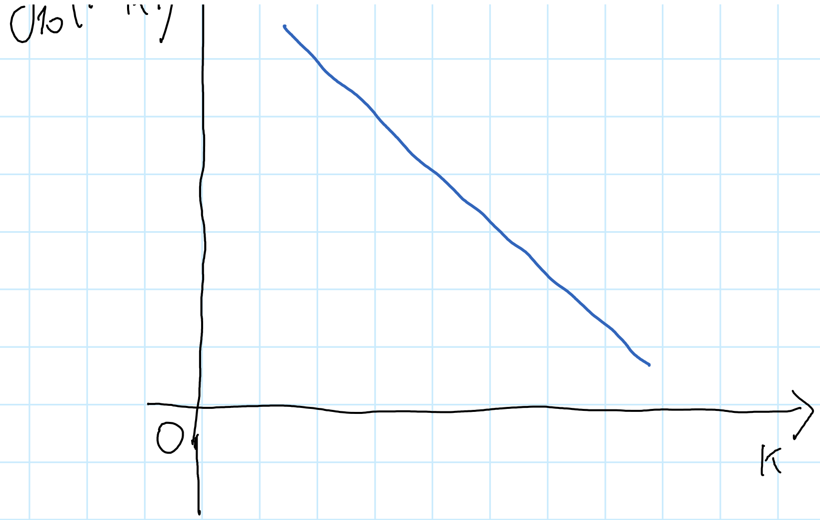
d) Disegnare un possibile profilo dell'errore $\log_{10}(|e_k|)$ in funzione di $k$ (per $k$ grande).

Dato che $g'(\xi) \neq 0$ il metodo è di ordine 1 con costante asintotica dell'errore $M = g'(\xi) = 0{,}31$; in altre parole, è

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{1}} = g'(\xi)$$

Dunque, l'andamento di $\log_{10}(|e_k|)$ in funzione di $k$ è






e) Stimare il numero di iterazioni per avere $|e_k| < 10^{-6}|e_0|$

È

$$\frac{|e_k|}{|e_{k-1}|} \approx M \implies |e_k| \approx \boxed{M^k \cdot |e_0| \overset{\text{impongo}}{<} 10^{-6}}$$

$\Downarrow$ risolvo rispetto a k

$$k > \frac{-6}{\log_{10}(M)} = \frac{-6}{\log_{10}\left(\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)} = 11,76$$

Perciò, servono 12 iterazioni.