Prof. Lidia Angeleri, Dr. Jorge Vitória
Università di Verona, 2015/2016
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 7
17 Novembre 2015

1. **(7 punti)** Sia G un gruppo di ordine $n > 1$. Si dimostri che se $n \leq 8$, allora G è risolubile (**Suggerimento**: si usino gli esercizi 1 dei fogli 3 e 6).

2. Sia $L := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.

   (a) **(3 punti)** Si determinino $[L : \mathbb{Q}]$, una $\mathbb{Q}$-base $\mathcal{B}$ di L e il polinomio minimo di $\sqrt[4]{3}$ su $\mathbb{Q}$.

   (b) **(3 punti)** Sia $f : L \longrightarrow L$ data da $f(x) = \sqrt[4]{3}x$. Si dimostri che f è un'applicazione $\mathbb{Q}$-lineare e si trovi la matrice A associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

3. Sia $u = \sqrt{1+\sqrt{15}} \in \mathbb{R}$.

   (a) **(3 punti)** Si calcoli il polinomio minimo g di u su $\mathbb{Q}$ e si trovi una base di $\mathbb{Q}(u)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

   (b) **(3 punti)** Si calcoli il polinomio minimo h di u su $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$ e si trovi una base di $\mathbb{Q}(u)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$.

   (c) **(3 punti)** Si trovino le radici di g su $\mathbb{C}$.

   (d) **(3 punti)** Si verifichi che $\mathbb{Q}(u)$ non è il campo di riducibilità completa per g su $\mathbb{Q}$.

4. Sia $F = \frac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{I}$, dove $I = (x^2+2x-1)$.

   (a) **(3 punti)** Si verifichi che F è un campo.

   (b) **(3 punti)** Quanti elementi ha F?

   (c) **(3 punti)** Si dimostri che $\overline{x}$ è una radice cubica di $\overline{3}$ in F.

5. Sia p un numero primo, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ il campo con p elementi e $f = x^p - x - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$

   (a) **(2 punti)** Si verifichi che f non ha radici in $\mathbb{F}_p$.

   (b) **(3 punti)** Sia $\alpha \in E$ una radice di f, con E opportuna estensione di $\mathbb{F}_p$. Si provi che per ogni $a \in \mathbb{F}_p$, $\alpha + a$ è radice di f.

   (c) **(3 punti)** Si provi che $\mathbb{F}_p(\alpha)$ è campo di riducibilità completa per f su $\mathbb{F}_p$ e si scriva f come prodotto di fattori lineari in $\mathbb{F}_p(\alpha)$.

   (d) **(3 punti)** Si dimostri che f è irriducibile in $\mathbb{F}_p[x]$ (**Suggerimento**: si supponga g un divisore di f con grado $r < p$; si studi il coefficiente di x^{r-1} in g e si deduca che $r\alpha \in \mathbb{F}_p$).

Consegna: giovedí 3 dicembre, 13:30, all'inizio della lezione.