Compito di Logica (m)

Giuseppe Spolaore

11 febbraio 2011

Esercizio 1: Chiarire le nozioni di *subordinazione tra (occorrenze di) connettivi* e di *(occorrenza di) connettivo principale*; poi specificare il connettivo principale e le relazioni di subordinazione tra (occorrenze di) connettivi con riferimento alle seguenti ffbf:

Ad es. con riferimento a $-(P \wedge (P \vee Q))$ è sufficiente specificare che '$-$' è il connettivo principale e che '$\vee$' è subordinato a '$\wedge$'.

1.1 $P \wedge Q \rightarrow P \leftrightarrow -P \vee Q$

1.2 $P \rightarrow Q \vee P \leftrightarrow -(P \wedge Q)$

Esercizio 2: Dimostrare le seguenti ricorrendo alle sole regole primitive:

2.1 $\vdash P \rightarrow P \vee Q$

2.2 $P \vee -Q, -P \vdash -Q$

2.3 $Q \rightarrow P \vdash -P \rightarrow -Q$

Esercizio 3: Dimostrare le seguenti, dove il simbolo '$\vDash$' indica che la sequenza è *tautologica* (a differenza di '$\vdash$', il quale indica che la sequenza è derivabile) e il simbolo $\nvdash$ che la sequenza non è derivabile:

3.1 $-(P \wedge Q) \vDash -P \vee -Q$

3.2 $\vDash P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

3.3 $P \rightarrow Q \nvdash Q$

Esercizio 4: Dimostrare che ogni fbf del linguaggio del calcolo enunciativo termina o con una lettera enunciativa o con una parentesi.

Risolvere l'esercizio 4 è dimostrare che tutte le ffbf godono della proprietà P, dove la proprietà P è la proprietà di *terminare o con una lettera enunciativa o con una parentesi.*

Esercizio 5: Secondo un importante metateorema (denominato metateorema 3 nel Lemmon), tutte le tautologie sono teoremi del calcolo enunciativo. Dimostrare il metateorema di completezza a partire da questo metateorema.

Esercizio 6: Tradurre le seguenti nella notazione della logica predicativa (usando le lettere predicative 'F' e 'G', 'I' e il nome 'm'):

6.1 Ogni francese invidia Menard

6.2 Nessuno invidia Menard

6.3 Tutti i francesi sono insolenti tranne Menard.

6.4 Almeno due greci si invidiano l'un l'altro.

Soluzioni

1. Un connettivo (o meglio una sua occorrenza) è il connettivo principale di una data fbf quando ha quella stessa fbf come suo ambito. Un connettivo è subordinato a un altro connettivo quando l'ambito del primo è contenuto nell'ambito del secondo (e, naturalmente, i due ambiti non coincidono).

1.1 C.P.: $\leftrightarrow$; $\wedge$ sub. a $\rightarrow$; $-$ sub. a $\vee$

1.2 C.P.: $\leftrightarrow$; $\vee$ sub. a $\rightarrow$; $\wedge$ sub. a $-$.

2.1 $\vdash P \rightarrow P \vee Q$

1	(1)	P	A
1	(2)	$P \vee Q$	1 I$\vee$
	(3)	$P \rightarrow P \vee Q$	$1, 2$ PC

2.2 $P \vee -Q, -P \vdash -Q$

1	(1)	$P \vee -Q$	A
2	(2)	$-P$	A
3	(3)	P	A
4	(4)	Q	A
$3, 4$	(5)	$P \wedge Q$	$3, 4$ I$\wedge$
$3, 4$	(6)	P	5 E$\wedge$
$2, 3, 4$	(7)	$P \wedge -P$	$2, 6$ I$\wedge$
$2, 3$	(8)	$-Q$	$4, 7$ RAA
9	(9)	$-Q$	A
$1, 2$	(10)	$-Q$	$1, 3, 8, 9, 9$ E$\vee$

2.3 $Q \rightarrow P \vdash -P \rightarrow -Q$

1	(1)	$Q \rightarrow P$	A
2	(2)	$-P$	A
$1, 2$	(3)	$-Q$	$1, 2$ MTT
1	(4)	$-P \rightarrow -Q$	$2, 3$ PC

3.1 Come si può osservare dalla seguente tavola di verità

P	Q	$-(P \wedge Q)$	$-P \vee -Q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

non c'è nessuna assegnazione sotto la quale $-(P \wedge Q)$ è vera e $-P \vee -Q$ è falsa. Dunque, $-(P \wedge Q) \vDash -P \vee -Q$.

3.2 Come si può osservare dalla seguente tavola di verità

P	Q	$P \to (Q \to P)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

$P \to (Q \to P)$ è vera per ogni assegnazione. Dunque $\models P \to (Q \to P)$.

3.3 Come si può vedere dalla seguente tavola di verità:

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

c'è un'assegnazione sotto la quale la premessa $P \to Q$ è vera e la conclusione Q è falsa (ossia $P = \mathrm{F}, Q = \mathrm{F}$). Dunque la sequenza non è tautologica. Ma per un noto metateorema (metateorema 1 nel Lemmon) se una sequenza è derivabile allora è tautologica, e dunque se non è tautologica allora non è derivabile. Possiamo dunque concluderne che $P \to Q \nvdash Q$. *Q.D.E.*

4. Proviamo per induzione sulle ffbf che ogni fbf gode della proprietà di terminare o con una lettera enunciativa o una parentesi. Chiamiamo questa proprietà P per brevità. (a) Consideriamo una qualunque lettera enunciativa A. A ovviamente termina con una lettera enunciativa, ossia A stessa, e dunque gode di P. (b) Ora assumiamo che le ffbf A e B godano di P, e mostriamo che anche $-$A, (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B), (A $\to$ B) e (A $\leftrightarrow$ B) godono di P. In tutti i casi la dimostrazione è ovvia perché $-$A termina con lo stesso simbolo rispetto ad A e (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B) ecc. terminano con una parentesi. (c) Per il principio di induzione per il linguaggio, concludiamo che tutte le ffbf terminano o con una lettera enunciativa o con una parentesi. *Q.D.E.*

5. Il metateorema di completezza dice che tutte le sequenze tautologiche sono derivabili. Per provarlo, assumiamo che

(1) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \vdash B$

sia una sequenza tautologica e mostriamo che è derivabile. Riflettendo sulla matrice di $\to$ e sulle nozioni di sequenza tautologica e di tautologia, possiamo provare che, se (1) è una sequenza tautologica, allora

(2) $\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_{3\to} \ldots \to (A_n \to B) \ldots))$

è una tautologia. Dunque, per il metateorema 3, (2) è una teorema. Ma se (2) è un teorema, allora

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \vdash B$

è derivabile, perché possiamo derivarla da (2) per iterate applicazioni della regola di assunzione e di MPP. *Q.D.E.*

6.1 $(x)(Fx \to Ixm)$

6.2 $(x) - Ixm$

6.3 $(x)(Fx \wedge -(x = m) \to Ix)$ oppure, se secondo voi la frase implica che Menard è francese e non è insolente, $(x)(Fx \wedge -(x = m) \to Ix) \wedge Fm \wedge -Im$.

6.4 $(\exists x)(\exists y)(Gx \wedge Gy \wedge x \neq y \wedge Ixy \wedge Iyx)$