Programma del corso di Analisi Funzionale

Seconda parte - a.a. 2009-10

G. Orlandi

Lo spazio degli operatori lineari e continui in spazi di Banach e di Hilbert. Norma di un operatore. Convergenza in norma. Operatori invertibili. Serie di Neumann. Operatore aggiunto. Spettro. Risolvente.

Operatori compatti. Approssimazione mediante operatori di rango finito. Spettro di un operatore compatto. Operatori compatti in spazi di Hilbert. Operatori di Hilbert-Schmidt. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti in spazi di Hilbert.

Dimostrazione del teorema spettrale: la forma quadratica $Q(x) = \langle Tx, x\rangle$ associata all'operatore compatto T è debolmente continua, dato che $x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$ e inoltre $|x_n| \leq M$, dunque

$$|\langle Tx_n, x_n\rangle - \langle Tx_0, x_0\rangle| \leq |Tx_n - Tx_0| \cdot |x_n| + |\langle Tx_0, x_n - x_0\rangle| \to 0.$$

Per il Teorema di Weierstrass, $|Q(x)|$ ammette massimo e minimo sulla palla unitaria B_1 (debolmente compatta). Sia e_1 un punto di massimo: si ha $|e_1| = 1$, ed inoltre, per ogni $|v| \leq 1$ tale che $\langle v, e_1\rangle = 0$, si ha $\langle v, Te_1\rangle = 0$, come si verifica osservando che, in virtù del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, e_1 è punto critico della funzione $Q(x) + \lambda|x|^2$ sul piano generato da e_1 e da v. In particolare, $Te_1 = \langle Te_1, e_1\rangle \cdot e_1$, ovvero e_1 è autovettore di T e $Q(e_1) = \langle Te_1, e_1\rangle$ è, in modulo, il massimo autovalore di T.

Iteriamo il procedimento, determinando e_n autovettore di T, con $|e_n| = 1$, punto di massimo di $|Q(x)|$ su $(\mathrm{span}\{e_1, ..., e_{n-1}\})^\perp \cap B_1$, e chiamiamo $\lambda_n = Q(e_n)$ l'autovalore corrispondente. Si ha $|\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n|$. Se per un certo n_0 si ha $Q(e_{n_0}) = 0$, allora si ha $(\mathrm{span}\{e_1, ..., e_{n_0-1}\})^\perp = \ker T$. Infatti, se $\langle v, e_i\rangle = 0\ \forall\, i < n_0$, allora $\langle Tv, e_i\rangle = \langle v, Te_i\rangle = 0$. Dall'identità (di polarizzazione) $4\langle Tv, u\rangle = Q(u+v) - Q(u-v) = 0\ \forall\, u$ tale che $\langle u, e_i\rangle = 0\ \forall\, i < n_0$, ponendo $u = Tv$ si deduce $|Tv|^2 = 0$, ossia $v \in \ker T$.

Alternativamente, rimane definita una successione di autovettori ortonormali e_n, da cui $e_n \rightharpoonup 0$ per la diseguaglianza di Bessel, e dunque $Te_n = \lambda_n e_n \to 0$, da cui $|\lambda_n| = |\langle Te_n, e_n\rangle| \searrow 0$. Sia $N = \overline{\mathrm{span}\{e_1, ..., e_n, ...\}}^\perp$. Per $v \in N$ si ha necessariamente $Q(v) = 0$ e quindi, per quanto visto sopra, $N = \ker T$.

L'insieme $\{e_1, ..., e_n, ...\}$, completato con un sistema ortonormale completo di $\ker T$, costituisce una base Hilbertiana di autovettori di T. $\square$

Teorema dell'alternativa di Fredholm.

Teorema di Lax-Milgram.

Spazi di Sobolev $W^{1,p}$ e $W_0^{1,p}$, H^1 e H_0^1 in dimensione uno. Diseguaglianza di Poincaré. Immersione compatta di $W^{1,p}([a,b])$ in $C^{0,1/p'}([a,b])$ ed *a fortiori* in $L^q([a,b])$, per $1 < p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$.

Problemi al contorno in dimensione uno: problema di Dirichlet, problema di Neumann. Formulazione classica, formulazione debole, esistenza, unicità e stabilità della soluzione debole, regolarità hilbertiana. Maggiore regolarità e ritorno alla soluzione classica. Problema di minimo associato, formulazione variazionale. Problema di Sturm-Liouville, decomposizione spettrale di L^2 mediante autovettori dell'operatore corrispondente. Rappresentazione in serie della soluzione, rappresentazione in forma integrale mediante funzione (nucleo) di Green. Metodo di Galerkin per l'approssimazione finito-dimensionale di problemi al contorno.

Cenni sulla teoria delle distribuzioni. Gli spazi $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$, per $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Convergenza nel senso delle distribuzioni. Distribuzione T_u associata ad una funzione u localmente sommabile in Ω: $\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$. Distribuzione T_μ associata ad una misura di Radon μ in Ω: $\langle T_\mu, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)d\mu(x)$. Prodotto $\psi \cdot T$ di una distribuzione per una funzione $\psi \in C^\infty(\Omega)$: $\langle \psi \cdot T, \varphi\rangle = \langle T, \psi \cdot \varphi\rangle$. Distribuzione di Dirac $\langle \delta_0, \varphi\rangle = \varphi(0)$. Derivate distribuzionali: $\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle$, per $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Esempi: derivata della funzione di Heaviside, derivata della delta di Dirac. Gradiente distribuzionale: $\langle \nabla T, \vec{\varphi}\rangle = -\langle T, \operatorname{div} \vec{\varphi}\rangle$ per $\vec{\varphi} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$. Convoluzione di distribuzioni: per $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, si pone $T * \varphi(x) = \langle T, \tau_x \check{\varphi}\rangle$. Proprietà: $D^\alpha(T * \varphi) = D^\alpha T * \varphi = T * D^\alpha \varphi$. Per $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (almeno una delle quali a supporto compatto) si definisce $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ in modo che valga $(S * T) * \varphi = S * (T * \varphi)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. La delta di Dirac δ_0 è l'elemento neutro rispetto al prodotto di convoluzione. Problemi differenziali formulati nel senso delle distribuzioni. Soluzione fondamentale per un operatore lineare e continuo L su $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: è una distribuzione G tale che $L(G) = \delta_0$. Per $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la distribuzione $U = G * T$ è soluzione dell'equazione $L(U) = T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Derivate deboli. Derivate misure. Spazi $W^{1,p}(\Omega)$, per $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Norma $W^{1,p}$: $||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$. Riflessività, separabilità. Lo spazio $BV(\Omega)$ delle funzioni a variazione limitata. Norma BV: $||u||_{BV(\Omega)} = ||u||_{L^1(\Omega)} + |\nabla u|(\Omega)$. Spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$. Regolarizzazione per convoluzione. Teorema di Meyers-Serrin. Operatori di prolungamento. Regolarizzazione nel caso di un dominio Lipschitziano. Regola di Leibniz e regola della catena in $W^{1,p}$.
Una caratterizzazione di $W^{1,p}(\Omega)$, per $1 < p \leq +\infty$: data $u \in L^p(\Omega)$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

(1) continuità su $L^{p'}$ del funzionale $T_u^i(\varphi) = \int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx\ \forall\, i = 1, ..., n$, ovvero $\exists\, C > 0$ tale che $|T_u^i(\varphi)| \leq C||\varphi||_{L^{p'}(\Omega)}$.

(2) $\exists\, C > 0$ tale che $||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)} \leq |h|C$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$ e per ogni h tale che $|h| <\operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$. Si osservi che in (1) e (2) si può scegliere $C = ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$.

Per $p = 1$ le due precedenti condizioni caratterizzano le funzioni $u \in BV(\Omega)$.

Criterio di compattezza forte in $L^p(\Omega)$ (Teorema di Fréchét-Kolmogorov). Teoremi di immersione di Sobolev, nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ oppure nel caso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia un dominio per cui esiste un operatore di prolungamento continuo $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Diseguaglianze di Sobolev, Morrey. Diseguaglianza di interpolazione $||u||_q \leq ||u||_p^\alpha \cdot ||u||_r^{1-\alpha}$, per $q^{-1} = \alpha p^{-1} + (1-\alpha)r^{-1}$. Teorema di immersione compatta di Rellich-Kondrachov.

Misura variazione totale di una misura vettoriale. Lo spazio $BV(\Omega)$ delle funzioni a variazione limitata. Regolarizzazione mediante funzioni $C^\infty(\Omega)$, compattezza forte in $L^1(\Omega)$, immersione in $L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$. Funzioni BV di una variabile: differenza di funzioni monotone crescenti, decomposizione della derivata in parte assolutamente continua, parte di salto e parte cantoriana. Derivata distribuzionale di funzioni caratteristiche. Insiemi di perimetro finito. Diseguaglianza isoperimetrica, costante ottimale e problema isoperimetrico/isovolumetrico. Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni. Esistenza della soluzione del problema isovolumetrico. Problemi variazionali convessi in $BV(\Omega)$: il modello di Osher-Rudin-Fatemi per l'analisi delle immagini. Problemi variazionali in $H^1(\Omega)$ ed in $H_0^1(\Omega)$: il problema di Dirichlet. Formulazione classica e debole, esistenza, unicità e stabilità via Lax-Milgram. Compattezza e simmetria dell'operatore soluzione, frequenze e modi normali di vibrazione di un dominio, domanda di V. Kaç: "Can one ear the shape of a drum?".

Bibliografia.

Brézis; *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson - Dunod (1994).
Giusti; *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser (1984).
Kolmogorov, Fomin; *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale*, Edizioni Mir (1980).
Ziemer; *Weakly differentiable functions*, Springer (1989).