Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

# Esercizi per il Corso di ALGEBRA

**Foglio 2**
14 ottobre 2014

1. Sia $S_8$ il gruppo simmetrico dato da tutte le permutazioni $\{1,\dots,8\} \to \{1,\dots 8\}$.

   (a) Si verifichi che $S_8$ non è un gruppo abeliano.

   (b) Si scriva l'elemento di $S_8$

   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

   come prodotto di trasposizioni e si decida se $\sigma$ è pari o dispari. Si determini l'ordine di $\sigma$.

   (c) Sia $G$ il gruppo ciclico generato da $\sigma$. È un sottogruppo normale di $S_8$?

   (d) Si determini l'ordine e l'indice di $G$ in $S_8$.

   *(8 punti)*

2. (a) Siano $r, n \in \mathbb{N}$ e sia $\pi = (x_1, \dots, x_r)$ un ciclo in $S_n$.
   Si verifichi che per ogni permutazione $\sigma \in S_n$ si ha

   $$\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_r))$$

   (b) Si verifichi che l'insieme

   $$\mathcal{V} = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset S_4$$

   è un sottogruppo normale di $A_4$, detto *gruppo di Klein*, che è abeliano ma non ciclico.

   (c) Si dimostri che qualunque gruppo non ciclico di 4 elementi è isomorfo a $\mathcal{V}$.

   (d) Si dimostri che ogni gruppo con 4 elementi è un gruppo abeliano

   *(8 punti)*

3. Sia $G$ un gruppo.

   (a) Si dimostri che $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \text{ per ogni } g \in G\}$ è un sottogruppo normale di $G$.

   (b) Sia $N$ un sottogruppo normale di $G$. Si provi che se $N$ è contenuto in $Z(G)$ e $G/N$ è ciclico, allora $G$ è abeliano.

   *(6 punti)*

4. Sia $p$ un numero primo. Sia $G$ un gruppo di ordine $p^2$ e $N$ un sottogruppo normale di $G$ di ordine $p$. Sia $\mathrm{Aut}(N) = \{\varphi : N \to N \mid \varphi$ è un isomorfismo$\}$ .
   (a) Si provi che $\mathrm{Aut}(N)$ è un sottogruppo di $S_{p-1}$ e si deduca che $p$ non divide l'ordine di $\mathrm{Aut}(N)$.
   (b) Si consideri l'omomorfismo $G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Aut}(N)$, $g \mapsto \varphi_g$, dove $\varphi_g(n) = g^{-1}ng$ per ogni $n \in N$. Si dimostri che $\mathrm{Ker}\varphi = G$ e si deduca che $N \leq Z(G)$ (Sugg: si usi il punto $(a)$ e il Teorema Fondamentale dell'Omomorfismo).
   (c) Si provi che $G/N$ è ciclico e si concluda che $G$ è abeliano

*(8)*

5. Si provi che ogni gruppo di ordine $p^2$ è un gruppo abeliano (Sugg: si usi l'equazione delle classi) *(**)*

Gli esercizi $(**)$ sono da considerarsi difficili, ma particolarmente stimolanti. Il loro svolgimento comporta ulteriori punti al foglio di esercizi

**Consegna: mercoledì 22 durante la lezione.**