

## Foglio 9

**Esercizio 1.** Si consideri il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{C}^4$   $A = \langle a_1 = (i, 0, 0, 1)^T, a_2 = (1, 0, i, 1)^T, a_3 = (2i, 1, 3, i)^T, a_4 = (2 - i, -1, -3 + 2i, 3 - i)^T \rangle$ .

1. Determinare una base ortogonale di  $A$ .
2.  $A$  è isomorfo a  $\mathbb{C}^4$ ? In caso negativo completare la base prima ottenuta per  $A$  ad una base ortonormale di  $\mathbb{C}^4$ .
3. Si trovi la proiezione ortogonale su  $A$  di  $(1, 0, -1, 2)^T$ .

**Esercizio 2.** Si consideri il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$   $V = \langle v_1 = (1, 0, 1)^T, v_2 = (1, 1, 0)^T, v_3 = (2, -1, 3)^T \rangle$ .

1. Determinare una base ortogonale di  $V$ .
2. Completare la base prima ottenuta per  $V$  ad una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ .
3. Trovare  $V^\perp$ .
4. Sia  $v = (1, 0, -1)^T$ . Verificare che  $v = P_V(v) + P_{V^\perp}(v)$ .

**Esercizio 3.** Si considerino i sottospazi  $U = \langle (5, 1, 7, 0)^T, (1, 0, 0, 1)^T, (0, 1, 2, 6)^T \rangle$  e  $W = \langle (1, 0, 2, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T \rangle$  di  $\mathbb{R}^4$ .

1. Determinare le dimensioni ed esibire una base di  $U$  e  $W$ , rispettivamente.
2. Fornire una stima della dimensione di  $U \cap W$  e  $U + W$ . La somma  $U + W$  è diretta?
3. Determinare la dimensione e una base di  $U \cap W$ .
4. Determinare la dimensione e una base di  $U + W$ .
5. Determinare una base ortogonale di  $U$ . Completarla ad una base ortogonale di  $\mathbb{R}^4$ .

**Esercizio 4.** Si considerino i vettori  $v_1 = (1, 0, 1, 0)^T, v_2 = (3, 1, 0, 1)^T, v_3 = (-1, 1, 1, 2)^T, v_4 = (1, 1, 1, 1)^T$  e  $v_5 = (4, 2, 1, 0)^T$ .

1.  $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle = \mathbb{R}^4$ ?
2. A partire dai vettori  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  estrarre una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$ .

**Esercizio 5.** 1. Dimostrare che la seguente applicazione definisce un prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longmapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle := (3v_1 + v_3)w_1 + 4v_2w_2 + (v_1 + 3v_3)w_3. \end{aligned}$$

2. Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato da  $\langle [1 \ 0 \ 1]^T, [-1 \ 0 \ 1]^T \rangle$ . Determinare una base ortonormale di  $W$ .
3. Determinare il complemento ortogonale  $W^\perp$  di  $W$  rispetto al prodotto scalare definito al punto precedente.

**Esercizio 6.** 1. Determinare autovalori e autovettori di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Determinare una base di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $A$ .
3.  $A$  è simile ad una matrice diagonale? Se sì a quale matrice diagonale?
4. Determinare, se esiste, una base ortonormale diagonalizzante  $A$ .

**Esercizio 7.** 1. Siano  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  due matrici simmetriche. Si dimostri:  $AB$  è simmetrica se e solo se vale  $AB = BA$ .

2. Si dia un esempio di matrici simmetriche  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tali che la matrice  $AB$  non è simmetrica.