

ESPERIMENTO CASUALE



S

Spazio campionario : è l'insieme di **eventi** necessari e incompatibili che si presentano come **risultati** dell' ESPERIMENTO CASUALE.



X

è l'insieme dei numeri reali associato ad S, in modo che ad ogni elemento (evento) di S corrisponda uno ed un solo numero reale.



P(X)

è la funzione di probabilità secondo la quale ad ogni numero reale di X si assegna una misura di probabilità.

Definizione: dato un esperimento casuale che genera un sistema di eventi necessari e incompatibili (*Spazio campionario S*), si dice **VARIABILE CASUALE (v.c.)** una grandezza **X** che, per ogni evento dello *Spazio campionario S*, assume uno ed un solo numero reale secondo una funzione di probabilità **P(X)**.

NOTAZIONE

Frequenza assoluta f_i (*notazione Cicchitelli n_i*)

Funzione di Probabilità $P(x)$ o $p(x)$ (*notazione Cicchitelli $f(x)$*)

I valori assunti da una v.c. X possono essere distribuiti in modo **discreto** o in modo **continuo**.

Se i valori di X sono distribuiti in modo **discreto** allora il numero di valori di X è NUMERABILE e a sua volta può essere finito o infinito.

Se i valori di X sono distribuiti in modo **continuo** allora il numero di valori di X è NON NUMERABILE e infinito.

Definizione di **v.c. DISCRETA**: una grandezza X che assume un numero finito o un'infinità numerabile di valori x_1, x_2, \dots, x_n con probabilità associate rispettivamente $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ è detta v.c. DISCRETA se e solo se:

1) La funzione di probabilità $P(X)$ è non negativa:

$$p(x_i) \geq 0 \quad (\text{per ogni } i, \text{ con } i=1,2,\dots,n)$$

Dove: $p(x_i) = P(X = x_i)$

$$2) \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE $F(x)$

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k p(x_i)$$

La $F(x)$ gode delle seguenti proprietà:

$$a) F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$b) F(x_n) = 1$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Da cui segue: $0 \leq F(x) \leq 1$

$$c) P(x_{i-1} < X \leq x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(x_i)$$

La FUNZIONE DI RIPARTIZIONE è una funzione reale non decrescente definita su $[0,1]$. La sua rappresentazione grafica è una funzione “a gradini”.

Definizione di **v.c. CONTINUA**: una grandezza **X** che assume tutti i valori nell'intervallo di numeri reali x_0 - x_1 (con $x_0 < x_1$) con funzione di probabilità associata **p(x)**, è detta v.c. CONTINUA se e solo se:

1) La funzione di probabilità $p(x)$ è non negativa: **$p(x) \geq 0$ per ogni x** ;

$$2) \int_{x_0}^{x_1} p(x) dx = 1$$

Nel continuo la $p(x)$ è detta *funzione di densità di probabilità* o *densità di probabilità*.

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (\text{se } -\infty \leq x \leq +\infty)$$

La $F(x)$ gode delle seguenti proprietà:

$$a) F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$b) F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Da cui segue: $0 \leq F(x) \leq 1$

$$c) P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) dx = F(b) - F(a)$$

La rappresentazione grafica della Funzione di ripartizione $F(x)$ è data dall'area sottesa alla Funzione di densità di Probabilità $p(x)$ a sinistra di x .

Per studiare le principali caratteristiche di una qualsiasi v.c. si possono utilizzare gli strumenti della Statistica Descrittiva per l'analisi delle distribuzioni (Indici di Localizzazione, di Variabilità e di Forma).

In particolare si ricordi la definizione di *momento*:

Data una variabile X diremo **momento (di potenza) di ordine r dall'origine A** la Media aritmetica delle erresime potenze degli scarti fra ogni valore assunto dalla variabile e la costante A . Analiticamente avremo:

$${}_A\mu_r = M \left[(x - A)^r \right]$$

Formule di calcolo nel caso in cui X sia una v.c.:

Se X v.c. DISCRETA:

$${}_A\mu_r = \sum_{i=1}^n (x_i - A)^r p(x_i)$$

In particolare:

MEDIA ARITMETICA o VALORE ATTESO (*Expected Value*) di una v.c. DISCRETA

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

VARIANZA di una v.c. DISCRETA

$$\sigma^2 = Var(X) = V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p(x_i) - (\mu)^2$$

DEVIAZIONE STANDARD di una v.c. DISCRETA

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Se X v.c. CONTINUA:

$${}_A\mu_r = \int_{C.E.} (x - A)^r p(x) dx$$

In particolare:

MEDIA ARITMETICA o VALORE ATTESO (*Expected Value*) di una v.c. CONTINUA

$$\mu = E(X) = \int_{C.E.} x \cdot p(x) dx$$

VARIANZA di una v.c. CONTINUA

$$\sigma^2 = Var(X) = V(X) = \int_{C.E.} (x - A)^2 p(x) dx = \int_{C.E.} x^2 p(x) dx - (\mu)^2$$

DEVIAZIONE STANDARD di una v.c. CONTINUA

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

ESERCIZIO

Una variabile discreta x assume i valori $x=1, 2, 3, 4$ con funzione associata $p(x)=ax$. Dopo aver determinato il valore del parametro a affinché x sia una variabile casuale, calcolare Media aritmetica, Varianza, Moda, Mediana e 20° Percentile.

SOLUZIONI

Affinchè x sia una variabile casuale deve essere soddisfatta la condizione

$$\sum_x p(x) = 1$$

che in questo caso diventa:

$$\sum_{x=1}^4 ax = 1 \text{ ovvero: } 1*a+2*a+3*a+4*a=1 \text{ Da cui: } 10a=1; \mathbf{a=1/10=0,1}$$

Quindi $p(x)=0,1x$

x	p(x)	x*p(x)	x ² *p(x)	P(x)
1	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0,2	0,4	0,8	0,3
3	0,3	0,9	2,7	0,6
4	0,4	1,6	6,4	1
	1	3	10	
			Var(x)=	1,00

$$E(x) = \sum_{x=1}^4 xp(x) = 3$$

$$V(x) = M(x^2) - (E(X))^2 = \sum_{x=1}^4 x^2 p(x) - 3^2 = 10 - 9 = 1$$

MODA(x)=4 perché $x=4$ è il termine della distribuzione cui corrisponde la massima frequenza, ovvero probabilità ($p(x)=0,4$).

Med(x)=3 Infatti dalle probabilità cumulate ($P(x)=0,6$) si evince che per $x=3$ si ha il 50% della distribuzione.

$x_{20\%}=2$ Infatti dalle probabilità cumulate ($P(x)=0,3$) si evince che in corrispondenza al valore $x=2$ si ha il 20% della distribuzione.

ESERCIZIO

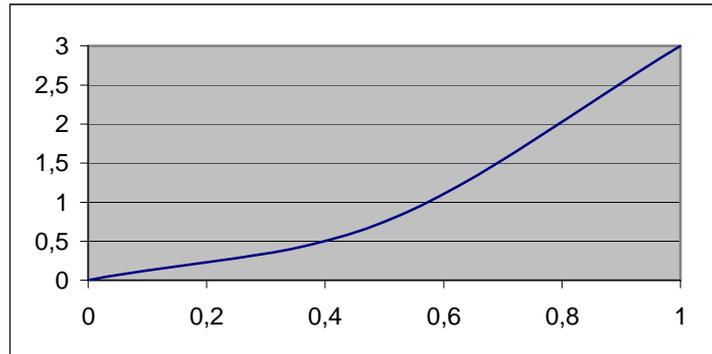
Una variabile continua X presenta la seguente funzione:

$$p(x)=3x^2 \text{ per } 0 \leq x \leq 1; p(x)=0 \text{ altrove}$$

- si verifichi se X è una variabile casuale;
- si calcolino la Media e la Varianza di X ;
- si determinino la Mediana e la Moda.

SOLUZIONI

- la I condizione affinché una variabile sia una variabile casuale è soddisfatta; infatti la funzione $p(x)$ è sempre non negativa per qualsiasi valore di x : $p(x) \geq 0$ per ogni valore di x .



La II condizione affinché una variabile continua sia una variabile casuale continua è che l'integrale della $p(x)$ calcolato nel *Campo di Esistenza (C.E.)* delle variabile sia unitario:

$$\int_{C.E.} p(x) dx = 1$$

Andiamo a verificare quest'ultima condizione:

$$\int_0^1 3x^2 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Quindi si tratta di una variabile casuale continua.

$$b) E(x) = \int_0^1 x p(x) dx = \int_0^1 x 3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx = 3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4} (1-0) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= M(x^2) - (E(X))^2 = \int_0^1 x^2 p(x) dx - (0,75)^2 = \int_0^1 3x^4 dx - 0,5625 = 3 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 - 0,5625 = \\ &= \frac{3}{5} - 0,5625 = 0,0375 \end{aligned}$$

$$c) \int_0^{Med(x)} p(x) dx = 0,50$$

$$\int_0^{Med(x)} 3x^2 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{Med(x)} = 0,50$$

$$Med^3(x) - 0 = 0,50$$

$$Med^3(x) = 0,50$$

$$Med(x) = \sqrt[3]{0,50} = 0,7937$$

MODA(x) = 1 (vedi grafico)

ESERCIZIO (v. Es.3 del Tema d'esame del 26/01/09 di Istituzioni di Stat.)

Due giocatori A e B lanciano due dadi. Il giocatore A vince €14 se la somma del punteggio dei due dadi è minore di 6. A perde €14 in caso contrario.

- Descrivere l'esito del gioco con una variabile casuale.
- Qual è la probabilità che A non vinca?
- Il gioco si può definire equo?
- Quanto dovrebbe pagare A a B al fine di garantire che il gioco sia equo?
- Quantificare in euro il rischio associato ad ogni partita.

SOLUZIONI

La somma del punteggio di due dadi è data da 36 valori, di cui 10 minori di 6, ovvero minori o uguali a 5, e gli altri 26 valori rimanenti maggiori o uguali a 6:

SOMMA	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Quindi la v.c. X che descrive l'esito del gioco sarà la seguente:

x	P(x)
14	0,2778
-14	0,7222

dove $P(x=+14) = 10/36 = 0,2778$; $P(x=-14) = 26/36 = 0,7222$

- A non vince, ovvero perde, quando la somma del punteggio dei due dadi risulta essere maggiore o uguale a 6:

$$P(\text{Somma} \geq 6) = 1 - P(S < 6) = 1 - [P(S=2) + P(S=3) + P(S=4) + P(S=5)] =$$

$$=1-[1/36+2/36+3/36+4/36]=1-10/36=1-0,2778=0,7222$$

- c) Il gioco sarebbe equo se la $E(x)$ fosse nulla. Ma qui $E(x)=\sum xp(x)=-6,2222$ quindi il gioco non è equo:

x	P(x)	xP(x)
14	0,2778	3,889
-14	0,7222	-10,111
		-6,222

- d) Affinchè il gioco fosse equo A dovrebbe pagare a B la somma y che soddisfa il seguente vincolo:

$$E(x)=+14*(10/36)-y*(26/36)=0$$

$$y=5,3846 \text{ €}$$

- e) il *rischio* associato ad ogni partita è dato dallo *Scarto quadratico medio* della v.c. x :

x	P(x)	xP(x)	$x^2P(x)$
14	0,2778	3,889	54,4488
-14	0,7222	-10,111	141,551
		-6,222	196

$$Var(x)=M(x^2)-(E(x))^2=196-(-6,2222)^2=157,284$$

$$s.q.m.(x)=\sqrt{V(x)}=12,54\text{€}$$