ziente di E rispetto alla relazione $\mathscr{R}$ e viene indicata col simbolo $E/\mathscr{R}$.

Reciprocamente, data una partizione $\mathscr{F}$, è subito individuata in modo unico una relazione $\mathscr{R}$ tale che $\mathscr{F} = E/\mathscr{R}$. Questa sarà evidentemente la seguente:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ appartengono a un medesimo elemento di } \mathscr{F}.$$

Data in E una relazione $\mathscr{R}$, risulta individuata l'applicazione $E \to E/\mathscr{R}$ che porta ogni $x \in E$ nella sua classe di equivalenza $[x]$; si tratta di un'applicazione surgettiva che viene detta *applicazione canonica sul quoziente.*

Prima di lasciare l'argomento, vediamo ancora due esempi di notevole importanza.

d) Consideriamo l'insieme $\mathbf{N}^2$ (costituito dalle coppie di interi naturali). Introduciamo in $\mathbf{N}^2$ la seguente relazione:

$$(m, n) \sim (m', n') \underset{def}{\Leftrightarrow} m + n' = m' + n. \qquad [4.1]$$

Lasciamo al lettore la cura di verificare che si tratta di una relazione di equivalenza; è consigliabile farsi (nel piano, riferito ad assi cartesiani) una rappresentazione grafica di $\mathbf{N}^2$ e delle classi di equivalenza che risultano definite. La relazione di equivalenza [4.1] può essere impiegata per introdurre formalmente l'insieme $\mathbf{Z}$ degli interi relativi, partendo dagli interi naturali: si pone per definizione $\mathbf{Z} = \mathbf{N}^2/\sim$. (Il lettore non si spaventi: il trucco sta nel tenere presente che la coppia (m, n) fa la parte dell'intero relativo $m - n$.) L'addizione si definirà, ovviamente, così:

$$[(m, n)] + [(m_1, n_1)] = [(m + m_1, n + n_1)].$$

Ma, naturalmente, occorre dimostrare che il risultato (che è una classe di equivalenza) dipende solo dalle due classi di equivalenza addende, e non dalle coppie, che le rappresentano. Lasciamo al lettore il compito di dimostrarlo. Il lettore non avrà poi difficoltà (sapendo dove vuole arrivare) a definire la moltiplicazione di due elementi di $\mathbf{Z}$; occorre sempre tener presente che quando si deve operare su classi di equivalenza bisogna dimostrare che il risultato è indipendente dai rappresentanti che le individuano.

e) Sia $\mathbf{Z}$ l'insieme degli interi relativi, e sia $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$. Nell'insieme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ (che è dunque insieme di tutte le coppie (p, q) di interi relativi, con $q \neq 0$), introduciamo la seguente relazione

$$(p, q) \sim (p', q') \underset{def}{\Leftrightarrow} pq' = p'q. \qquad [4.2]$$

Ad esempio, si ha $(1, 3) \sim (2, 6) \sim (-1, -3) \sim (4, 12) \sim \ldots$ Si verifica facilmente che si tratta di una relazione di equivalenza: la proprietà riflessiva e simmetrica sono evidenti; verifichiamo la transitiva. Supponendo $(p, q) \sim \sim (p', q')$ e $(p', q') \sim (p'', q'')$ si ha: $pq' = p'q$ e $p'q'' = p''q'$. Moltiplicando membro a membro la prima per q'' e la seconda per q si ottiene: $pq'q'' = p'qq'' = p''q'q$, da cui, essendo $q' \neq 0$, si ricava $pq'' = p''q$, che dice appunto $(p, q) \sim (p'', q'')$.

È istruttivo rappresentare graficamente le classi di equivalenza.

Dopo l'esempio precedente il lettore avrà forse già capito dove si vuole arrivare: l'insieme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ può essere considerato come insieme delle frazioni (si interpreti (p, q) come p/q); la relazione di equivalenza introdotta non è altro che l'ordinaria relazione di equivalenza tra frazioni. L'insieme quoziente è dunque l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali relativi; naturalmente, per completare il discorso, occorrerebbe definire le operazioni e le diseguaglianze fra numeri razionali, sempre tenendo presente che, operando su classi di equivalenza, occorre dimostrare l'indipendenza del risultato dai rappresentanti delle classi.

Consideriamo ora un'applicazione f surgettiva di un insieme A in un insieme B (fig. 4.1). Per ogni $y \in B$ l'insieme $f^{-1}(\{y\})$ non

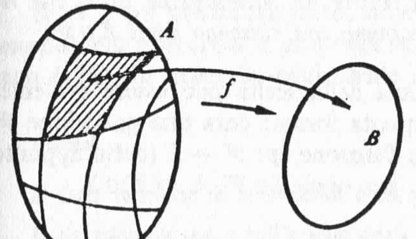

Figura 4.1

è vuoto; la famiglia $\mathscr{F} = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in B\}$ è costituita da insiemi disgiunti, e ricopre A; dunque è una partizione di A. Evidentemente, questa partizione può essere individuata dalla relazione di equivalenza:

$$x_1 \sim x_2 \underset{def}{\Leftrightarrow} f(x_1) = f(x_2).$$

Definiamo ora un'applicazione $\tilde{f}: \mathscr{F} \to B$ nel seguente modo: $\tilde{f}([x]) = f(x)$. Si vede subito che questa definizione è legittima perché, se è $[x] = [u]$, allora, essendo $x \sim u$, si ha: $\tilde{f}([u]) = f(u) =$