Sistemi
Secondo Parziale , 13/06/2019
Versione A, tempo a disposizione: 2h

Esercizio 1
Dato il sistema LTI causale a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alla differenze :

$$v(k) + \frac{5}{14}v(k-1) - \frac{1}{14}v(k-2) = 7u(k) - u(k-2)$$
$$v(-1) = 1 \qquad v(-2) = -2 \qquad u(k) = (-\tfrac{1}{2})^k \delta_{-1}(k)$$

I) Calcolare la risposta libera nel tempo (esclusivamente nel tempo).
II) Si discuta la stabilitá asintotica e la stabilitá BIBO.
III) Calcolare la riposta <u>impulsiva</u> del sistema utilizzando l'anti-trasformata Zeta.
IV) Calcolare la riposta totale del sistema utilizzando l'anti-trasformata Zeta.

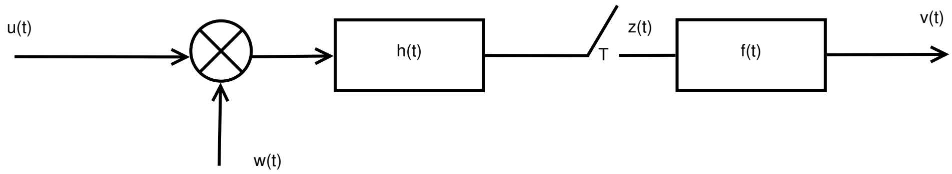
Esercizio 2
A partire dalla seguente equazione differenziale

$$0.1\dot{v}(t) + 0.01\ddot{v}(t) + 0.001\dddot{v}(t) = 100\ddot{u}(t) - 100u(t)$$

I) Trovare la funzione di trasferimento.
II) Disegnare il diagramma di Bode (sia di ciascuna componente elementare, sia il risultante diagramma globale).
III) Un segnale sinusoidale puro di ampiezza A_0 e frequenza $f = 0.016Hz$ viene dato in ingresso al sistema in oggetto. Come viene modificata l'ampiezza del segnale, all'uscita del sistema?

NB: Nel testo originale del compito mancava il termine u(t) aggiunto in rosso nell'equazione. In fase di correzione si è tenuto conto di questo errore e sono stati valutati ugualmente sia coloro che hanno aggiunto u(t) sia coloro che non lo hanno aggiunto.

Esercizio 3
Dato il seguente schema a blocchi trovare l'uscita v(t) del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze :



Dove $u(t) = 3cos(6\pi t) + cos(2\pi t)$, $w(t) = 2cos(4\pi t)$, $h(t) = 4sinc(4t)$, $f(t) = 2sinc(2t)$.
Periodo di campionamento con $T = 1s$.
Si verifica il fenomeno di Aliasing? Motivare la risposta.

Soluzione

Esercizio 1

I) **3pt**

$$\begin{cases} 7c_1 - 2c_2 = 1 \\ 49c_1 + 4c_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$v_l(k) = c_1(\frac{1}{7})^k + c_2(-\frac{1}{2})^k = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^k$$

II)**2pt**

$|\lambda_{1,2}|< 1$ Entrambe le radici sono all'interno del cerchio unitario. Quindi il sistema é asintoticamente stabile. Questo implica la BIBO stabilitá.

III)**3pt**

$$H(z) = \frac{7z^2 - 1}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})}$$

$$\frac{H_1(z)}{z} = \frac{7z^2 - 1}{z(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - \frac{1}{7}} + \frac{C}{z + \frac{1}{2}} = \frac{14}{z} - \frac{28}{3}\frac{1}{z - \frac{1}{7}} + \frac{7}{3}\frac{1}{z + \frac{1}{2}}$$

Moltiplico per z e antitrasformo

$$h(t) = 14\delta(k) - [\frac{28}{3}(\frac{1}{7})^k\delta(k-1) + \frac{7}{3}(-\frac{1}{2})^k\delta(k-2)]\delta_{-1}(k)$$

IV) **4 pt**

trasformata z dell'ingresso : $U(z) = \dfrac{z}{z + \frac{1}{2}}$

$z^0V(z) + \frac{5}{14}(z^{-1}V(z) + v(-1)z^0) - \frac{1}{14}(z^{-2}V(z) + v(-2)z^0 + v(-1)z^{-1}) = 7z^0U(z) - z^{-2}U(z)$

$n = m = 2$ Moltiplico tutto per z^2

$$V(z)(z^2 + \frac{5}{14}z - \frac{1}{14}) + \frac{5}{14}z^2 + \frac{2}{14}z^2 - \frac{1}{14}z = U(z)(7z^2 - 1)$$

$$V(z) = \frac{7z^2 - 1}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})}U(z) + \frac{-\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{14}z}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})}$$

$$V(z) = \frac{7z^2 - 1}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})}\frac{z}{(z + \frac{1}{2})} + \frac{-\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{14}z}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})}$$

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{A}{(z - \frac{1}{7})} + \frac{B}{(z + \frac{1}{2})^2} + \frac{C}{(z + \frac{1}{2})}$$

Ora per calcolare i coefficienti bisogna usare il solito metodo dei fratti semplici. La difficoltá con questa scomposizione é nel vedere la molteplicitá del polo $-\frac{1}{2}; \mu = 2$. Dove bisognava fare la derivata.

Ma sia nel compito versione A, che versione B, il calcolo dei coefficienti non é stato valutato.

Una volta ottenuti i coefficienti, si rimoltiplica per z e poi si fa l'antitrasformata. Avere la molteplicitá 2, implica nell'antitrasformata un parametro in più. $Bk(\frac{1}{2})^k\delta_{-1}(k)$

Esercizio 2

I) Ricavo la funzione di trasferimento a partire dall'equazione differenziale, e la riporto in forma di Bode:

$$0.1\dot{v}(t) + 0.01\ddot{v}(t) + 0.001\dddot{v}(t) = 100\ddot{u}(t) - 100u(t)$$
$$0.1sV(s) + 0.01s^2V(s) + 0.001s^3V(s) = 100s^2U(s) - 100U(s)$$
$$V(s)(0.1s + 0.01s^2 + 0.001s^3) = U(s)(100s^2 - 100)$$

$$H(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{100s^2 - 100}{0.1s + 0.01s^2 + 0.001s^3}$$

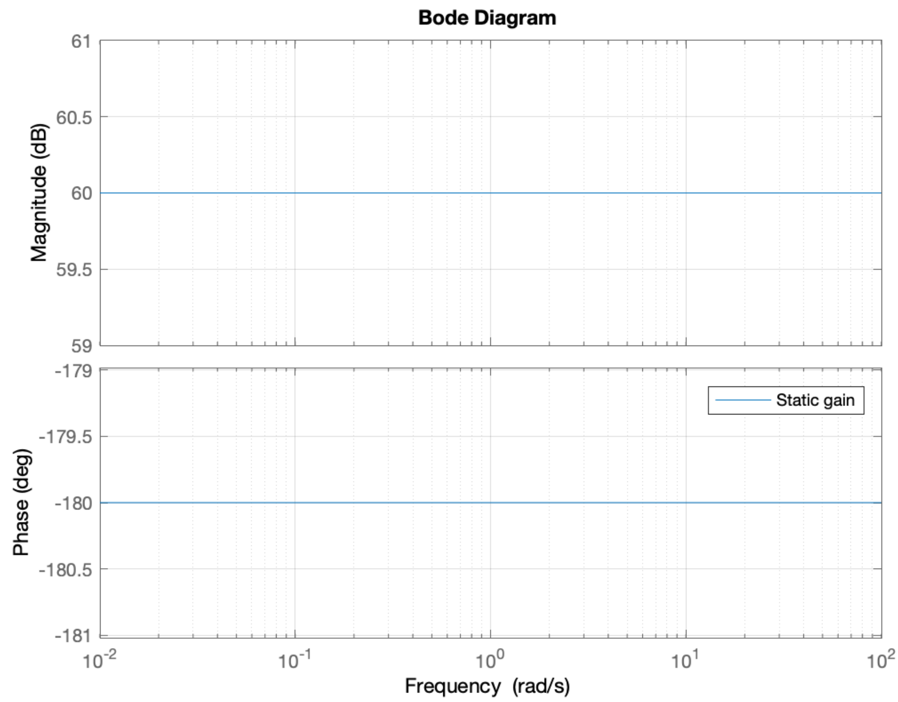
$$H(s) = \frac{100(s^2 - 1)}{\frac{1}{10}s(1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{100})}$$

$$H(s) = \frac{-1000}{s} \frac{(1 - s)(1 + s)}{1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{100}}$$

Punteggio: FdT corretta = 1pt + FdT in forma di Bode corretta = 1pt

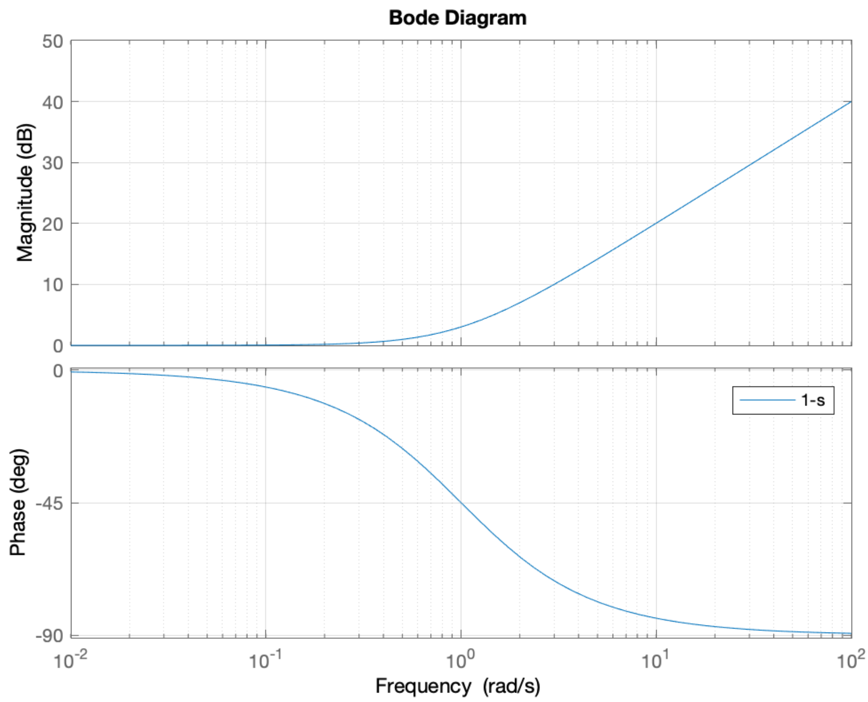
II)

1) -1000



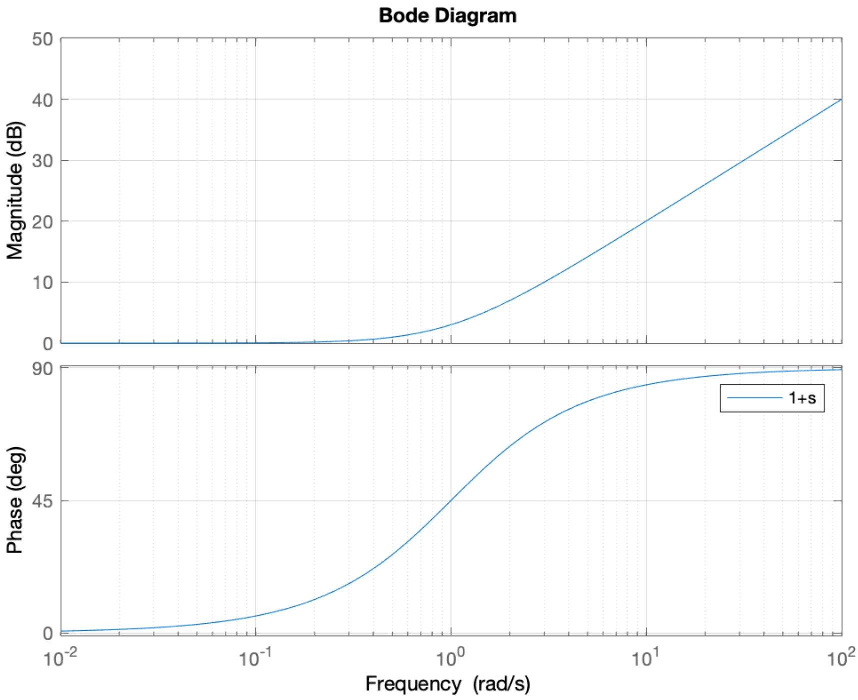
Punteggio: 1pt

2) 1-s



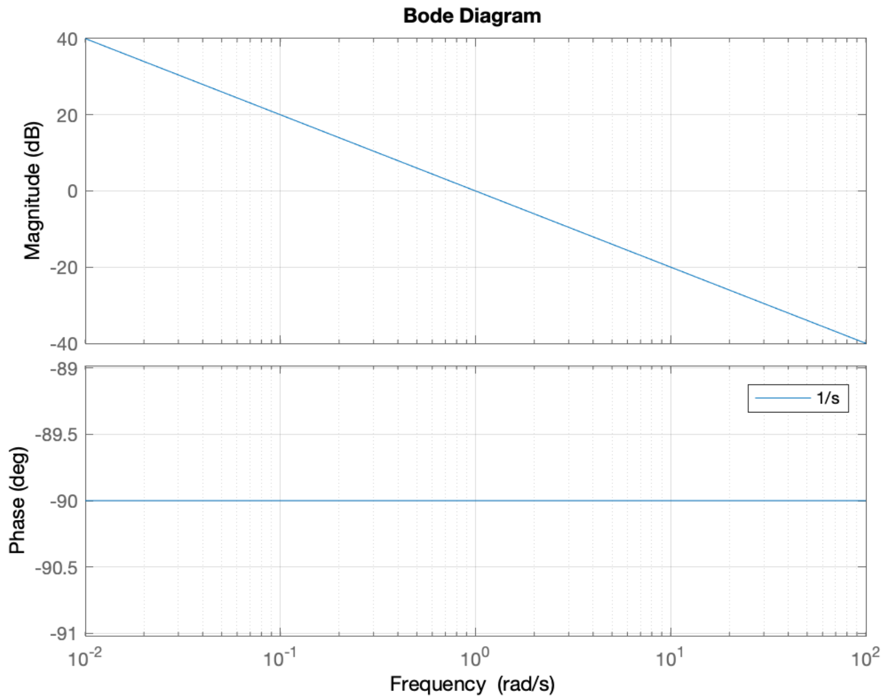
Punteggio: 0.5pt

3) 1+s



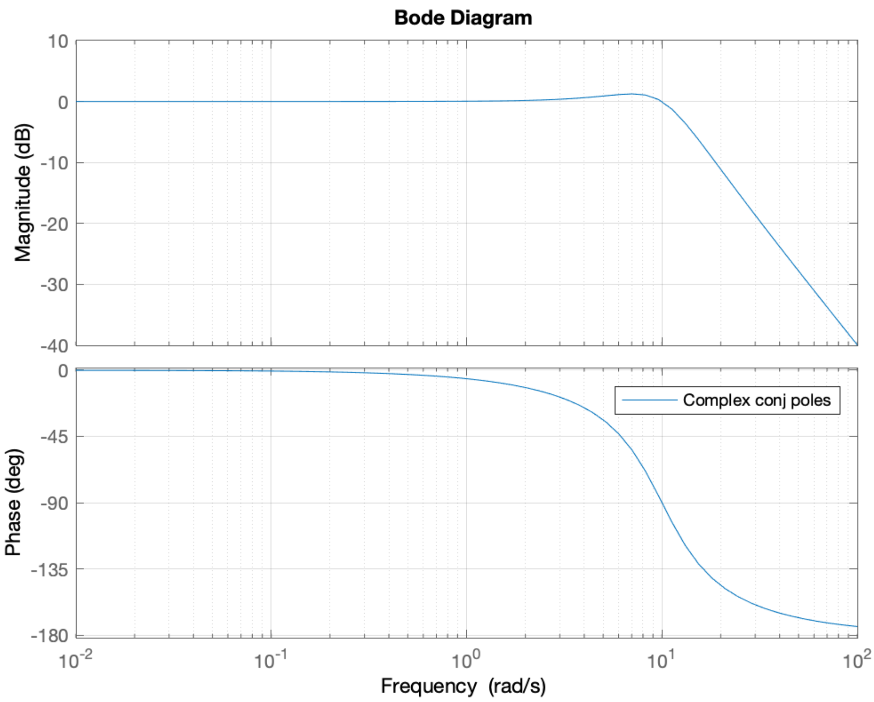
Punteggio: 0.5pt

4) 1/s



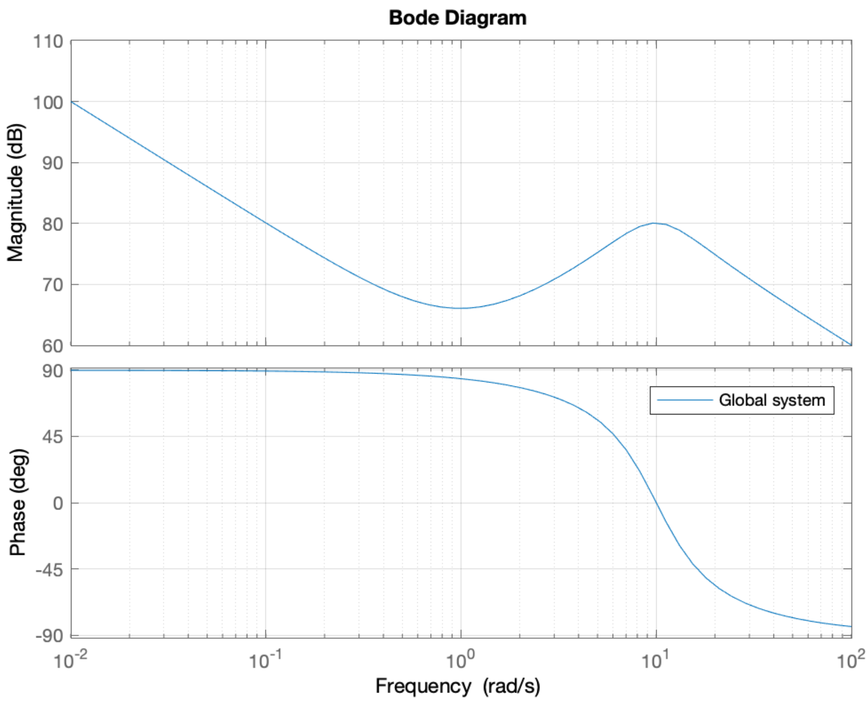
Punteggio: 1pt

5) Complex conjugate poles



Punteggio: 1pt

6) Global diagram



Punteggio: 2pt

III) Per prima cosa, calcolo ω:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 0.016 Hz = 0.1\frac{rad}{s} = 10^{-1}\frac{rad}{s}$$

Considero ora il diagramma globale calcolato al punto 6) e noto che quando la pulsazione vale 10^{-1}, il diagramma del modulo si trova a $80dB$. Quindi

$$80dB = 20\log_{10}|H(s)|$$

$$|H(s)| = 10^{\frac{80}{20}} = 10^4$$

L'ampiezza iniziale A_0 sarà quindi amplificata di un fattore 10^4.
Punteggio: 2pt

Esercizio 3

$U(f) = \frac{3}{2}[\delta(f-3) + \delta(f+3)] + \frac{1}{2}[\delta(f-1) + \delta(f+1)]$
$W(f) = \delta(f-2) + \delta(f+2)$
$H(f) = \Pi(\frac{f}{4})$
$F(f) = \Pi(\frac{f}{2})$
$f_c = 1Hz$

$v(t) = 4 + 8cos(2\pi t)$

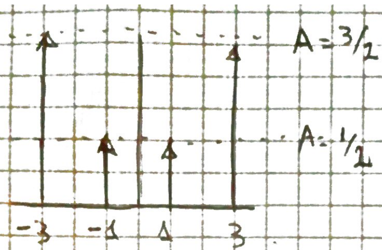
2pt: su trasformate

4pt: sui grafici , convoluzioni , moltiplicazioni e antitrasformata

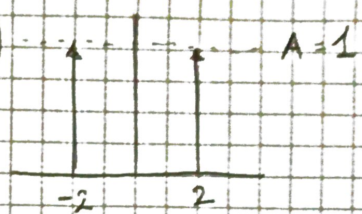
2pt: domanda su aliasing

totale 8 pt

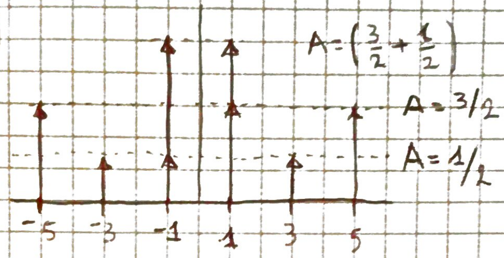
$U(f)$



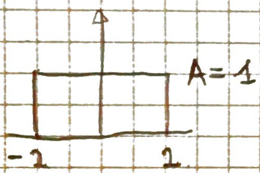
$W(f)$



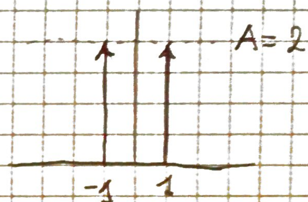
$V_1(f) = U(f) * W(f)$



$H(f)$

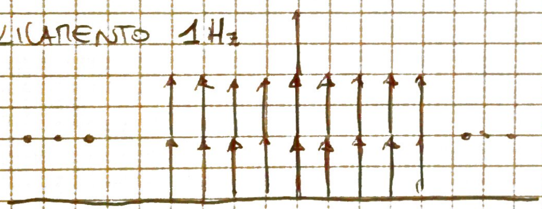


$V_2(f) = V_1(f)\,H(f)$

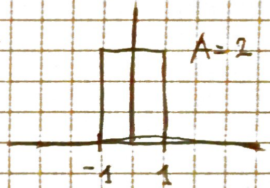


REPLICAMENTO 1 Hz

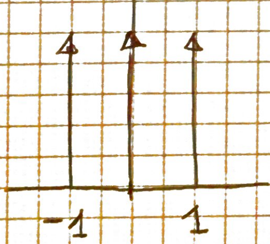
$V_3(f)$



$F(f)$



$V(f) = V_3(f)\,F(f)$



$$V(f) = 4\,\delta(f) + 4\left[\delta(f-1) + \delta(f+1)\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$v(t) = 4 + 8\cos(2\pi t)$$