Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 3 settembre 2004

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	
	T2	E2	
		E3	

T1) Sia diano le definizioni di autovalore, autovettore e autospazio relativi a una matrice A. Si dimostri che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

T2) Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B}$ una sua base ordinata; si dia la definizione di applicazione delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$, dimostrandone le principali proprietà.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathcal{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & -\alpha & -\alpha & \alpha \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & \alpha & \alpha & 3+3\alpha \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Si calcoli una base ortogonale di U, sottospazio di $\mathbf{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix};$$

si dica, senza calcolare matrici associate qual è il rango della proiezione ortogonale $P_U \colon \mathbf{C}^5 \to \mathbf{C}^5$.

Si determini una base ortogonale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\}$ di $\mathbf{C}^5$ che contenga la base ortogonale di U trovata e si calcoli la proiezione ortogonale di $[i\ 2i\ i\ 3i\ 0]^T$ sul complemento ortogonale di U.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2+\beta & -1-\beta & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 8 settembre 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

☐ (1) Se $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ è un'applicazione lineare suriettiva, allora f è biiettiva.

☐ (2) Se λ è un autovalore di una matrice $\mathbf{A}$, allora λ^2 è un autovalore della matrice $\mathbf{A}^2$.

☐ (3) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ è un insieme linearmente indipendente.

T1) Data una matrice quadrata $\mathbf{A}$, si diano le definizioni di autovalore e di polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$. Si dimostri: $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di $\mathbf{A}$ se e solo se il polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(X)$ di $\mathbf{A}$ soddisfa $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

T2) Si dia la definizione di prodotto interno in uno spazio vettoriale e si dimostri che, se $(\cdot \mid \cdot)$ è un prodotto interno su V, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale la disuguaglianza

$$(\mathbf{u} \mid \mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u} \mid \mathbf{u})(\mathbf{v} \mid \mathbf{v}).$$

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$. Inoltre si interpreti $\mathbf{A}_1$ come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Si consideri l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta + 1 & 0 & 2\beta + 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -\beta - 1 & 0 & -1 - 2\beta \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile; si determini, quando esiste, una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$. Esiste una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$?

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 8 luglio 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che, dato una insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ dello spazio V con prodotto scalare $(\cdot \mid \cdot)$, esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ di V tale che, per $1 \le k \le n$, si abbia

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \rangle.$$

T2) Si dia la definizione di molteplicità algebrica $m(\lambda)$ e geometrica $d(\lambda)$ dell'autovalore λ di una matrice A; si dimostri che $1 \le d(\lambda) \le m(\lambda)$.

E1) Sia α un parametro reale e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 3 & 0 & -1 & 3 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha+1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ciò non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Per ogni valore di α determinare una base dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$.

E2) Si calcoli per quale valore di $\alpha \in \mathbf{C}$ il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

ha dimensione due. Per questo valore, scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{x} = [0\ 1\ 0\ 1]^T$ sul sottospazio V_α e si determini una base ortogonale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 4-\beta & 2 & 0 & 4-2\beta \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ -2+\beta & -1 & 0 & -2+2\beta \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per uno di questi valori si calcoli una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori della matrice.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 7 aprile 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

☐ (1) Esiste una matrice $\mathbf{A}$ 4×4 il cui polinomio caratteristico ha grado 3?

☐ (2) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+z \\ y^2 \\ y+z \end{bmatrix}$. È un'applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale e $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente. L'insieme $\{\mathbf{v}_1; 2\mathbf{v}_2; -\mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente?

T1) Si diano le seguenti definizioni: (1) applicazione lineare, (2) insieme di vettori linearmente indipendente. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva e sia $\{\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_n\}$ una base di V. Si dimostri che $\{f(\mathbf{v}_1); \dots; f(\mathbf{v}_n)\}$ è un insieme linearmente indipendente di vettori di W.

T2) Si dia la definizione di prodotto interno in uno spazio vettoriale e si dimostri che, se $(\cdot \mid \cdot)$ è un prodotto interno su V e si pone $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \mid \mathbf{v})$, questo definisce una norma su V.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & \alpha - 5 & 10 & \alpha \\ 6 & 1 & \alpha + 14 & 3 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 5$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_5)$. Inoltre si interpreti $\mathbf{A}_5$ come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^4$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $[2\ -1\ 0\ 1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = [2\ -1\ 0\ 1]^T$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile; si determini, quando esiste, una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$. Esiste una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$?

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 6 aprile 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata tale che $2\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Si calcolino i possibili autovalori della matrice $\mathbf{A}$ e si dica se una tale matrice è sempre diagonalizzabile.

T2) Sia $f \colon V \to W$ un'applicazione lineare e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ basi di V e W rispettivamente. Si dia la definizione di matrice associata all'applicazione lineare rispetto alle due basi date, se ne dimostrino le principali proprietà e si delinei il metodo per ricavare matrici associate rispetto ad altre basi.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2\alpha & -2\alpha & 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ \alpha & 1-\alpha & 2 & 1+\alpha & 3+\alpha \\ 0 & 2 & 4 & 2+\alpha & 5+\alpha \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione $\mathbf{LU}$ e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $\mathbf{P}^T\mathbf{LU}$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) L'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ è definita da

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{v}_1) &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \\ f_\alpha(\mathbf{v}_2) &= 2\alpha\mathbf{v}_1 - 2\alpha\mathbf{v}_3 \\ f_\alpha(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli il rango di f_α (per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$) e si dica per quali valori di α il vettore $\mathbf{y} = [1\ 5\ 3]$ appartiene all'immagine di f_α.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1-2\beta & -4\beta & 2\beta & 0 \\ \beta & 2\beta+1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 30 marzo 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito B

T1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Si dimostri che, dato un insieme di vettori linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per ogni k, con $1 \le k \le n$,

$$\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_k \rangle.$$

T2) Sia $\mathbf{A}$ una matrice tale che $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Se ne calcolino i possibili autovalori e si dica se una tale matrice può avere tutti gli autovalori reali.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha-2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \alpha-2 & \alpha-2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \alpha-2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = 4\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = 5\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3(\beta-2)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4(\beta-2) & 0 & 4(\beta-2) \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 3$, si calcolino una base ortonormale dell'autospazio relativo all'autovalore 1.

Si dica per quali valori di β la matrice $\mathbf{B}_\beta$ è unitariamente diagonalizzabile.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 30 marzo 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito A

T1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Si dimostri che, dato un insieme di vettori linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per ogni k, con $1 \le k \le n$,

$$\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_k \rangle.$$

T2) Sia $\mathbf{A}$ una matrice tale che $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Se ne calcolino i possibili autovalori e si dica se una tale matrice può avere tutti gli autovalori reali.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \alpha-1 & \alpha-1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = 4\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = 5\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3(\beta-1)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4(\beta-1) & 0 & 4(\beta-1) \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 2$, si calcolino una base ortonormale dell'autospazio relativo all'autovalore 1.

Si dica per quali valori di β la matrice $\mathbf{B}_\beta$ è unitariamente diagonalizzabile.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 29 settembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che, dato un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ dello spazio vettoriale V, questo è linearmente indipendente se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri.

Si dimostri poi, dopo aver dato la definizione di base di uno spazio vettoriale finitamente generato, che ogni insieme di generatori contiene una base.

T2) Date le definizioni di autovalore e autovettore di una matrice, calcolare i possibili autovalori di una matrice $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} = -6\mathbf{I}$.

Si trovi un esempio di una matrice non diagonele con queste proprietà e che abbia due autovalori distinti.

E1) Sia α un parametro reale e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2\alpha-2 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha^2-\alpha \\ 1 & 2 & -1 & -\alpha & \alpha \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 1 & \alpha^3+2\alpha & \alpha^3 \\ \alpha & 2\alpha & 2 & \alpha^2+4\alpha & \alpha^2+3 \end{bmatrix}.$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ciò non è possibile, una decomposizione P^TLU. Per ogni valore di α determinare una base dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$.

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-3 & \beta+1 & 1-\beta & 0 \\ -3\beta & 0 & \beta+1 & 0 \\ 5\beta-4 & 2\beta-2 & 3-3\beta & 2 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per uno di questi valori si calcoli una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori della matrice.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 28 settembre 1999 — A

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Sia A una matrice $n \times p$ e si definisca l'applicazione lineare

$$f_A \colon \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^n$$

ponendo $f_A(\underline{v}) = A\underline{v}$. Si dia la definizione di spazio delle colonne $C(A)$ e di spazio nullo $N(A)$ di A; si dimostri che $C(A) = Im(f_A)$ e che $p = \dim N(A) + \dim C(A)$.

T2) Si dia la definizione di autovalore di una matrice quadrata A; si dimostri che, se $A^k = I$, per qualche $k > 0$, e λ è un autovalore *reale* di A, allora $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$.

E1) Sia α un parametro reale; si consideri la matrice

$$C_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha & \alpha^2+2 & \alpha^2-1 \\ 2 & -1 & 2\alpha & 1-\alpha \\ 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 2\alpha-1 & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini per quali valori di α la matrice ammette una decomposizione LU e la si scriva.
(b) Per i valori esclusi in precedenza, si determini una decomposizione P^TLU.
(c) Si dica per quali valori di α la matrice C_α ammette inversa destra o inversa sinistra.
(d) Si interpreti C_α come matrice aumentata $[A\ \underline{b}]$ di un sistema lineare. Si dica per quali valori di α il sistema ammette soluzioni (e con quanti parametri liberi).

E2) Sia $f \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata ad f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\underline{e}_4; \underline{e}_3; \underline{e}_1 - \underline{e}_2; \underline{e}_1 - \underline{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\underline{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{C}^4$) sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice B associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice B è diagonalizzabile.

E3) Si consideri la matrice complessa ($\beta \in \mathbf{C}$)

$$B_\beta = \begin{bmatrix} \beta-1 & -1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile?
(b) Per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile con una matrice unitaria?
(c) Per quali valori reali di β la matrice è diagonalizzabile con una matrice reale?

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 28 settembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si diano le definizioni di autovalore, autovettore di una matrice A; se λ è un autovalore di A, si definiscano le molteplicità algebrica $m(\lambda)$ e geometrica $d(\lambda)$ di λ e si dimostri che $1 \le d(\lambda) \le m(\lambda)$.

T2) Si enunci e si dimostri il teorema "nullità + rango" e se ne illustri una importante applicazione.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & 2-\alpha & 2\alpha+2 & 3\alpha-6 & 6\alpha \\ 2 & -3 & 3 & 7 & 9-\alpha \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2-\alpha \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Per quali valori di α la matrice $\mathbf{A}$ ha inversa destra o sinistra?

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

sul dominio e alla base canonica sul codominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha & \alpha^2+2\alpha+1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di $\mathbf{A}_\alpha$ e si dica per quali valori di α il vettore $\mathbf{y} = [1\ 0\ 3]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 4-\beta & 0 \\ 0 & 1+\beta & 0 \\ 3 & \beta+2 & -2 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 0$, si calcoli una base di ciascun autospazio di $\mathbf{B}_0$.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 28 giugno 2001

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

Compito A

T1) Si diano le definizioni di autovalore, autovettore di una matrice A; se λ è un autovalore di A, si definiscano le molteplicità algebrica $m(\lambda)$ e geometrica $d(\lambda)$ di λ e si dimostri che $1 \le d(\lambda) \le m(\lambda)$.

T2) Si enunci e si dimostri il teorema "nullità + rango" e se ne illustri una importante applicazione.

E1) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

sul dominio e alla base canonica sul codominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha & \alpha^2 + 2\alpha + 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di A_α e si dica per quali valori di α il vettore $\underline{y} = [1\ 0\ 3]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E2) Si calcoli la proiezione ortogonale del vettore $\underline{x} = [1\ 0\ 0\ 1]^T$ sul sottospazio V di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dopo aver verificato che $\dim V = 2$, si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle = V$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 4-\beta & 0 \\ 0 & 1+\beta & 0 \\ 3 & \beta+2 & -2 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 0$, si calcoli una base di ciascun autospazio di B_0.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 27 settembre 2007

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si discuta l'esistenza e l'unicità di soluzioni di sistemi lineari la cui matrice dei coefficienti abbia inversa destra o sinistra.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3. Per $\alpha = 0$,

(a) si calcoli una base ortogonale di U_0;
(b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^5$;
(c) si trovi la proiezione ortogonale del vettore $[2i\ i\ 3\ 0\ 1]^T$ su U_0.

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta & -b \\ 2 & -1 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 27 giugno 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

T1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata tale che $\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Si dica se una tale matrice può avere autovalori reali. Si scriva una matrice di questo tipo.

T2) Si dia la definizione di applicazione delle coordinate dallo spazio vettoriale V, data una sua base $\mathcal{B}$. Si dimostri che tale applicazione esiste ed è biiettiva.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2\alpha+2 & -2\alpha-2 & 0 & 0 & 2\alpha+2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ \alpha+1 & -\alpha & 2 & 2+\alpha & 4+\alpha \\ 0 & 2 & 4 & 3+\alpha & 6+\alpha \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione $\mathbf{LU}$ e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $\mathbf{P}^T\mathbf{LU}$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) L'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ è definita da

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{v}_1) &= 2\alpha\mathbf{v}_1 - 2\alpha\mathbf{v}_3 \\ f_\alpha(\mathbf{v}_1) &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \\ f_\alpha(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli il rango di f_α (per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$) e si dica per quali valori di α il vettore $\mathbf{y} = [1\ 5\ 3]$ appartiene all'immagine di f_α.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1-\beta & -2\beta & \beta & 0 \\ \beta/2 & \beta+1 & -\beta/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+(\beta/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 26 giugno 2008

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

Domande iniziali

☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 di rango 3. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

☐ (2) Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di V. Esiste un vettore $\mathbf{v}_4$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ sia linearmente indipendente?

☐ (3) Esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ di rango 3?

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si discuta l'esistenza e l'unicità di soluzioni di sistemi lineari la cui matrice dei coefficienti abbia inversa destra o sinistra.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\alpha & 1 \\ -\alpha & 1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 2$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_2)$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & \beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 2$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 25 settembre 2008

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Domande iniziali

☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 con $\det A \neq 0$. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

☐ (2) Esistono applicazioni lineari biiettive $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$?

☐ (3) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V. Esiste uno scalare α in modo che l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \alpha\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$ sia linearmente indipendente?

T1) Data la definizione di molteplicità algebrica m e geometrica d per l'autovalore λ della matrice quadrata $\mathbf{A}$, si dimostri che $1 \leq d \leq m$.

T2) Dati due sottospazi X e Y dello spazio vettoriale finitamente generato V, si definisca il sottospazio somma $X + Y$ e si dia una condizione necessaria e sufficiente affinché $\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y$.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha^2 & \alpha \\ 2 & 4-\alpha & 2\alpha - 1 & 2 \\ 1 & 2+\alpha & 3\alpha+1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ -1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = -1$ si trovi una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_{-1}$.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica

Prova scritta di Algebra lineare — 24 settembre 2001

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	
	T2	E2	
		E3	

T1) Si dimostri che, data una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ dello spazio $\mathbf{C}^n$, esiste una base ortogonale $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$ di $\mathbf{C}^n$ tale che, per $1 \le k \le n$, si abbia

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \rangle = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k \rangle.$$

T2) Si dia la definizione di rango di una matrice A; supposto che A abbia n righe, p colonne e rango k, si dimostri che A ha una inversa sinistra se e solo se ...

(Nota: completare la frase al posto dei puntini.)

E1) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha & 2 \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di f_α e si dica per quali valori di α il vettore $\underline{y} = [2 \ -2 \ 0]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E2) Si calcoli per quale valore di $\alpha \in \mathbf{C}$ il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ha dimensione due. Per questo valore, scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\underline{x} = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ sul sottospazio V_α e si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \underline{w}_3, \underline{w}_4 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 24 marzo 2000

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	
	T2	E2	
		E3	

Compito A

T1) Si diano le definizioni di autovalore, autovettore e di matrice diagonalizzabile e si dimostri che la matrice A di ordine n è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di C^n formata da autovettori di A.

T2) Si enunci e si dimostri il teorema "nullità + rango" e se ne illustri una importante applicazione.

E1) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

sul dominio e alla base canonica sul codominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 2\alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di A_α e si dica per quali valori di α il vettore $\underline{y} = [1\ 0\ 1]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E2) Si calcoli la proiezione ortogonale del vettore $\underline{x} = [1\ 0\ 0\ 1]^T$ sul sottospazio V di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dopo aver verificato che $\dim V = 3$, si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ tale che $\langle \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3 \rangle = V$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1+\beta & 1 \\ 0 & \beta & 0 \\ -2 & 5-\beta & 3 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 0$, si calcoli una base di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di B_0.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 30 giugno 2004

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che ogni matrice quadrata non singolare è prodotto di matrici elementari. (*Suggerimento*: si esponga il procedimento di eliminazione che, nel caso di una matrice non singolare, porta a una matrice di forma particolare.) Se ne deduca un metodo di calcolo del determinante.

T2) Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare suriettiva. Si definisca lo spazio nullo $N(f)$ e si dimostri che è un sottospazio vettoriale di V. Si enunci e si dimostri una relazione numerica fra $\dim V$, $\dim W$ e $\dim N(f)$.

E1) Si consideri la base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

di $\mathbf{C}^3$ e l'applicazione lineare $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ che, rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio, ha come matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini il rango di f e si dica se il vettore $\underline{y} = [4\ 3\ 2]^T$ appartiene a $\operatorname{Im}(f)$.

E2) Sia U il sottospazio di $\mathbf{C}^5$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e si dica, senza calcolare matrici associate qual è il rango della proiezione ortogonale $P_U\colon \mathbf{C}^5 \to \mathbf{C}^5$.

Si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4, \underline{w}_5\}$ di $\mathbf{C}^5$ che contenga la base ortogonale di U trovata.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \beta & 1-\beta & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 22 settembre 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

☐ (1) Se $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ è un'applicazione lineare suriettiva, allora f è biiettiva.

☐ (2) Siano $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se λ^2 non è un autovalore di una matrice $\mathbf{A}^2$, allora λ non è un autovalore della matrice $\mathbf{A}$.

☐ (3) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ non è un insieme di generatori di V.

T1) Si definisca quando una matrice quadrata $\mathbf{A}$ (di forma $n \times n$) è diagonalizzabile. Si dimostri: Se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, allora $\mathbb{C}^n$ possiede una base composta da autovettori di $\mathbf{A}$.

T2) Si diano le definizioni di rango e di spazio nullo di una matrice e si dimostri che, se $\mathbf{A}$ è una matrice $m \times n$, allora la somma fra il rango di $\mathbf{A}$ e la dimensione dello spazio nullo coincide con n.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$. Inoltre si interpreti $\mathbf{A}_1$ come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Si consideri l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta - 1 & -1 & \beta - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile; si determini, quando esiste, una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$. Esiste una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$?

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 22 giugno 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Sia A una matrice $n \times p$ e si definisca l'applicazione lineare

$$f_A \colon \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^n$$

ponendo $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$. Si dia la definizione di spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ e di spazio nullo $N(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$; si dimostri che $C(\mathbf{A}) = Im(f_{\mathbf{A}})$ e che $p = \dim N(\mathbf{A}) + \dim C(\mathbf{A})$.

T2) Si dia la definizione di autovalore di una matrice quadrata A; si dimostri che, se $\mathbf{A}^k = \mathbf{I}$, per qualche $k > 0$, e λ è un autovalore *reale* di $\mathbf{A}$, allora $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$. Che cosa si pu dire se λ ̀complesso e non reale?

E1) Sia α un parametro reale; si consideri la matrice

$$\mathbf{C}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha & \alpha^2+2 & \alpha^2-1 \\ 2 & -1 & 2\alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 2\alpha-1 & 1+\alpha \\ 1 & -1 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini per quali valori di α la matrice ammette una decomposizione LU e la si scriva.
(b) Per i valori esclusi in precedenza, si determini una decomposizione $P^T LU$.
(c) Si dica per quali valori di α la matrice $\mathbf{C}_\alpha$ ammette inversa destra o inversa sinistra.
(d) Si interpreti $\mathbf{C}_\alpha$ come matrice aumentata $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}]$ di un sistema lineare. Si dica per quali valori di α il sistema ammette soluzioni (e con quanti parametri liberi).

E2) Sia $f \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\underline{e}_4; \underline{e}_3; \underline{e}_1 - \underline{e}_2; \underline{e}_1 - \underline{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\underline{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si consideri la matrice complessa ($\beta \in \mathbf{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta-1 & -1 & \beta-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile? Per uno di tali valori, determinare una base di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 21 marzo 2007

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si diano le definizioni di rango e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa sinistra.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice e si giustifichi il fatto che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.

Si dimostri che, se λ_1, λ_2, λ_3 sono autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ con autovettori rispettivamente $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ \alpha & \alpha & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f \colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Verificare che per nessun valore del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$, per qualche valore di β?

Per $\beta = 1$, si trovi un insieme ortogonale $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ di autovettori di $\mathbf{B}_1$ e lo si completi a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 20 luglio 1999

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dia la definizione di applicazione lineare $f\colon V \to W$; si dimostri che, se f è lineare, allora

$$N(f) = \{\underline{x} \in V \mid f(\underline{x}) = \underline{0}\}$$

è un sottospazio di V e che

$$Im(f) = \{\, f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in V\,\}$$

è un sottospazio di V. Si provi che, se V ha dimensione finita, allora $\dim V = \dim N(f) + \dim Im(f)$.

T2) Si dia la definizione di autovalore di una matrice quadrata A; si dimostri che, se $A^k = \mathbb{O}$, per qualche $k > 0$, allora l'unico autovalore di A è 0.

E1) Sia α un parametro reale; si consideri la matrice

$$C_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha-1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini per quali valori di α la matrice ammette una decomposizione LU e la si scriva.
(b) Per i valori esclusi in precedenza, si determini una decomposizione $P^T LU$.
(c) Si dica per quali valori di α la matrice C_α ammette inversa destra o inversa sinistra.
(d) Si interpreti C_α come matrice aumentata $[A\ \underline{b}]$ di un sistema lineare. Si dica per quali valori di α il sistema ammette soluzioni (e con quanti parametri liberi).

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\underline{e}_3; \underline{e}_1 - \underline{e}_2; \underline{e}_1 - \underline{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\underline{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{C}^3$) sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice B associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice B è diagonalizzabile.

E3) Si consideri la matrice complessa ($\beta \in \mathbf{C}$)

$$B_\beta = \begin{bmatrix} \beta & -1 & \beta-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile?
(b) Per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile con una matrice unitaria?
(c) Per quali valori reali di β la matrice è diagonalizzabile con una matrice reale?

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 19 settembre 2002

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

T1) Si dia la definizione di applicazione delle coordinate rispetto ad una base ordinata di uno spazio vettoriale. Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ sono basi ordinate di V, si dimostri che esiste una ed una sola matrice M tale che, per ogni vettore $\underline{v} \in V$,
$$C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = MC_{\mathcal{D}}(\underline{v})$$
e che M è non singolare.

T2) Sia A una matrice $n \times n$ e sia $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di $\mathbf{C}^n$ formata da autovettori di A. Si dimostri che A è diagonalizzabile.

E1) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \right\}$$
sul dominio e alla base canonica sul codominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^4$ ha come matrice associata
$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1-2\alpha & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Si determini, per ogni α, il rango di f_α e si dica per quali valori di α il vettore $\underline{y} = [2\ -2\ 0\ 0]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E2) Si dimostri che, per ogni valore di $\alpha \in \mathbf{C}$, il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori
$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix}-2\\3\\-1\\2\end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix}-1\\-3\\1\\-2\end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix}3\alpha\\1\\1\\2\end{bmatrix}$$
ha dimensione tre. Scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\underline{x} = [0\ 1\ 0\ 1]^T$ sul sottospazio V_α determinare una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice
$$B_\beta = \begin{bmatrix} 3+\beta & 2 & 0 & 2+2\beta \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & 1 & 0 \\ -1-\beta & -1 & 0 & -2\beta \end{bmatrix}.$$
è diagonalizzabile.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 19 giugno 2007

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si diano le definizioni di rango e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa destra.

T2) Si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $n \times n$, esista una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ \alpha \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -1 \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2i \\ -1 \\ -5 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} i \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,
(a) si calcoli una base ortogonale di U_α;
(b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^5$.

E2) Sia $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2-2\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2\beta-3 & \beta+1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 17 settembre 2004

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che per ogni applicazione lineare $f\colon V \to W$ vale la relazione:

$$\dim \mathrm{N}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V,$$

dopo aver definito i simboli usati.

T2) Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ sue basi ordinate; si enunci e si dimostri una relazione fra le coordinate dei vettori di V rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$, dimostrandone le principali proprietà.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathcal{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2(\alpha-1) & 1-\alpha & \alpha-1 & 2(\alpha-1) \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Si calcoli una base ortogonale di U, sottospazio di $\mathbf{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix};$$

si dica, senza calcolare matrici associate qual è il rango della proiezione ortogonale $P_U\colon \mathbf{C}^5 \to \mathbf{C}^5$.

Si determini una base ortogonale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\}$ di $\mathbf{C}^5$ che contenga la base ortogonale di U trovata e si calcoli la proiezione ortogonale di $[i\ 2i\ i\ 3i\ 0]^T$ sul complemento ortogonale di U.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3+\beta & -2-\beta & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 16 luglio 2004

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_p$ vettori di $\mathbf{C}^n$. Si dimostri che esistono vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_p$ di $\mathbf{C}^n$ a due a due ortogonali e tali che, per $1 \le k \le p$,

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \rangle.$$

T2) Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Si dia la definizione di matrice associata a f rispetto a una scelta delle basi su V e W e se ne dimostrino esistenza e unicità. Dimostrare anche che matrici associate a f rispetto a scelte diverse delle basi hanno lo stesso rango.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathcal{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & 2-\alpha & 2\alpha+2 & 3\alpha-6 & 6\alpha \\ 2 & -3 & 3 & 7 & 9-\alpha \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2-\alpha \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Si calcoli una base ortogonale di U, sottospazio di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix};$$

si dica, senza calcolare matrici associate qual è il rango della proiezione ortogonale $P_U\colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$.

Si determini una base ortogonale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ che contenga la base ortogonale di U trovata e si calcoli la proiezione ortogonale di $[i\ 2i\ i\ 3i]^T$ sul complemento ortogonale di U.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta & 1-\beta & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 16 luglio 2001

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito A

T1) Si diano le definizioni di autovalore, autovettore di una matrice A. Si dimostri che una matrice A $(n \times n)$ è diagonalizzabile se e solo se $\mathbf{C}^n$ ha una base formata da autovettori di A.

T2) Si enunci e si dimostri la disuguaglianza di Schwarz, dopo aver introdotto il concetto di prodotto scalare.

E1) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

sul codominio e alla base canonica sul dominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 & -\alpha \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1-2\alpha & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di f_α e si dica per quali valori di α il vettore $\underline{y} = [2\ -2\ 4]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E2) Si calcoli per quali valori di $\alpha \in \mathbf{C}$ il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3+\alpha \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ha dimensione due. Per tali valori, scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\underline{x} = [0\ 1\ 0\ 1]^T$ sul sottospazio V_α e si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \underline{w}_3, \underline{w}_4 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 2 & \beta & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & (-1-\beta)/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 14 settembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Una matrice quadrata $\mathbf{A}$ si dice *nilpotente* se esiste un intero $k > 0$ tale che $\mathbf{A}^k$ sia la matrice nulla. Se $\mathbf{A}$ è nilpotente, se ne calcolino i possibili autovalori e si diano condizioni sufficienti per la diagonalizzabilità.

T2) Si dia la definizione di rango di una matrice A; supposto che A abbia m righe, n colonne e rango k, si dimostri che A ha una inversa sinistra se e solo se ...
(Nota: completare la frase al posto dei puntini.)

E1) Sia α un parametro reale; si consideri la matrice

$$\mathbf{C}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini per quali valori di α la matrice ammette una decomposizione $\mathbf{LU}$ e la si scriva.
(b) Per i valori esclusi in precedenza, si determini una decomposizione $\mathbf{P}^T\mathbf{LU}$.
(c) Si dica per quali valori di α la matrice $\mathbf{C}_\alpha$ ammette inversa destra o inversa sinistra.
(d) Si interpreti $\mathbf{C}_\alpha$ come matrice aumentata $[\mathbf{A} \;\; \mathbf{b}]$ di un sistema lineare. Si dica per quali valori di α il sistema ammette soluzioni.

E2) Sia α un parametro reale; rispetto alla base

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 - 2\alpha & 2 \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di f_α e si dica per quali valori di α il vettore $\mathbf{y} = [2 \; -2 \; 0]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 + \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 luglio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

☐ (1) Esiste una matrice $\mathbf{A}$, 3×4 a coefficienti complessi, di rango 4?

☐ (2) Esiste una matrice $\mathbf{A}$, 4×4 con $\det \mathbf{A} = 1$, tale che 0 è un autovalore di A?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una sua base. Esistono $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ tali che $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ è un insieme di generatori?

T1) Si diano le seguenti definizioni: (1) applicazione lineare, (2) insieme di generatori di uno spazio vettoriale. Sia $g\colon V \to W$ un'applicazione lineare suriettiva e sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di generatori di V. Si dimostri che $\{g(\mathbf{v}_1), \dots, g(\mathbf{v}_n)\}$ è un insieme di generatori di W.

T2) Si dia la definizione di prodotto interno in uno spazio vettoriale e si dimostri che, se $(\cdot \mid \cdot)$ è un prodotto interno su V e si pone $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \mid \mathbf{v})$, vale la disuguaglianza

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & \alpha - 3 & 6 & \alpha \\ 5 & 1 & \alpha + 11 & 8 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 3$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_3)$. Inoltre si interpreti $\mathbf{A}_3$ come la matrice completa di un sistema lineare e si trovino tutte le soluzioni del sistema.

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{v}_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 2\beta - 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -\beta & 0 & 1 - 2\beta \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile; si determini, quando esiste, una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$. Esiste una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$?

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 luglio 2008

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Domande iniziali

☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 di rango 1. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

☐ (2) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme di generatori di V. Esiste un vettore $\mathbf{v}_4$ tale che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ sia linearmente indipendente?

☐ (3) Esiste un'applicazione lineare iniettiva $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$?

T1) Si dia la definizione di rango di una matrice. Si dimostri che il rango di una matrice è uguale al rango della matrice trasposta.

T2) Dopo aver dato la definizione di similitudine fra matrici, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia simile a una matrice diagonalizzabile.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = -2$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_{-2})$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 2$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 14 luglio 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito B

T1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata tale che $\mathbf{I} + \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Si dica se una tale matrice può avere autovalori reali. Si scriva una matrice 3×3 con questa proprietà.

T2) Si dimostri che una matrice quadrata $n \times n$ $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile se e solo se $\mathbb{C}^n$ ha una base formata da autovettori di $\mathbf{A}$. Si diano anche le necessarie definizioni di autovalore e autovettore.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & -\alpha + 1 & 0 & 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \alpha - 2 & \alpha \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & \alpha^2 - \alpha \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione $\mathbf{LU}$ e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $\mathbf{P}^T\mathbf{LU}$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) L'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ è definita da

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{v}_1) &= 2\alpha\mathbf{v}_1 - 2\alpha\mathbf{v}_3 \\ f_\alpha(\mathbf{v}_2) &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ f_\alpha(\mathbf{v}_3) &= -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli il rango di f_α (per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$) e si determini una base dell'immagine di f_α.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 + 4\beta & 8\beta & -4\beta & 0 \\ -2\beta & -4\beta + 1 & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito D

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ y-1 \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è un insieme di generatori di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e spazio nullo di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche iniettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha - 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3\alpha - 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$ e una base di $N(\mathbf{A}_1)$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \;\; 0 \;\; 2]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [-2 \;\; 0 \;\; -1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.

Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [1 \;\; 0 \;\; -1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta + 2 & -1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito C

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+z \\ y-1 \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è un insieme di generatori di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e spazio nullo di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche suriettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha-2 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 2-\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 2$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_2)$ e una base di $N(\mathbf{A}_2)$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \;\; 1 \;\; 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [2 \;\; 0 \;\; 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(e_1) = 2v_1$, $f(e_2) = v_1 + v_2 - v_3$, $f(e_3) = v_1 + v_2 + v_3$.

(1) Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [0 \;\; -1 \;\; 1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice $(\beta \in \mathbb{C})$

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta-2 & -1 & \beta-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito B

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x+1 \\ y-x \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un insieme linearmente indipendente di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e immagine di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare suriettiva $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche biiettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha - 1 & \alpha \\ 2 & 1 & 2\alpha - 2 & 2\alpha + 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$ e una base di $N(\mathbf{A}_1)$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \;\; 0 \;\; -1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [2 \;\; -1 \;\; 0]^T$, $\mathbf{v}_3 = [1 \;\; 1 \;\; -1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(e_1) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, $f(e_2) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $f(e_3) = \mathbf{v}_2 - 2v_3$.

(1) Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [0 \;\; 2 \;\; 1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice $(\beta \in \mathbb{C})$

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta + 1 & -1 & \beta - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito A

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+1 \\ y+z \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è un insieme di generatori di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e immagine di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare iniettiva $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche biiettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha+1 & \alpha \\ 2 & 1 & 2\alpha+3 & 1+2\alpha \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = -1$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_{-1})$ e una base di $N(\mathbf{A}_{-1})$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \ \ 1 \ \ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [0 \ \ 0 \ \ -1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [2 \ \ 0 \ \ 1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [2 \ \ -1 \ \ 0]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice $(\beta \in \mathbb{C})$

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta-1 & -1 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito B

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x+1 \\ y-x \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un insieme linearmente indipendente di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e immagine di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare suriettiva $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche biiettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha - 1 & \alpha \\ 2 & 1 & 2\alpha - 2 & 2\alpha + 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$ e una base di $N(\mathbf{A}_1)$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \;\; 0 \;\; -1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [2 \;\; -1 \;\; 0]^T$, $\mathbf{v}_3 = [1 \;\; 1 \;\; -1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(e_1) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, $f(e_2) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $f(e_3) = \mathbf{v}_2 - 2v_3$.

(1) Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [0 \;\; 2 \;\; 1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice $(\beta \in \mathbb{C})$

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta + 1 & -1 & \beta - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito C

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+z \\ y-1 \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è un insieme di generatori di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e spazio nullo di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche suriettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha-2 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 2-\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 2$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_2)$ e una base di $N(\mathbf{A}_2)$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \;\; 1 \;\; 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [2 \;\; 0 \;\; 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(e_1) = 2v_1$, $f(e_2) = v_1 + v_2 - v_3$, $f(e_3) = v_1 + v_2 + v_3$.

(1) Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [0 \;\; -1 \;\; 1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta-2 & -1 & \beta-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito D

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ y-1 \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è un insieme di generatori di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e spazio nullo di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche iniettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha - 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3\alpha - 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$ e una base di $N(\mathbf{A}_1)$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 2]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \ \ 1 \ \ 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [-2 \ \ 0 \ \ -1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.

Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [1 \ \ 0 \ \ -1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice $(\beta \in \mathbb{C})$

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta + 2 & -1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 13 dicembre 2002 — S. Lucia

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito B

T1) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore di una matrice A. Si dica che cosa significa che due matrici sono simili e che una matrice è diagonalizzabile. Si dimostri che una matrice A $(n \times n)$ che ha n autovalori distinti è diagonalizzabile. Si tratta di una condizione necessaria per la diagonalizzabilità?

T2) Si dimostri che, dato un insieme linearmente indipendente $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ in $\mathbf{C}^4$, è possibile trovare $\underline{w} \in \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ (cioè uno di essi) in modo che l'insieme $\{\underline{w}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sia una base di $\mathbf{C}^4$.

E1) Si consideri la base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

di $\mathbf{C}^3$ e l'unica applicazione lineare $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ tale che

$$\begin{aligned} f(\underline{v}_1) &= 3\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3; \\ f(\underline{v}_2) &= \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3; \\ f(\underline{v}_3) &= \underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3. \end{aligned}$$

Si determini il rango di f e si dica se il vettore $\underline{y} = [-2\ 1\ -1]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f$.

E2) Sia U il sottospazio di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e si scriva la matrice dell'applicazione lineare $P_U\colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ (proiezione ortogonale su U) rispetto alla base canonica. Qual è il rango di P_U?

Si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \underline{w}_3, \underline{w}_4 \rangle = U$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1-\beta & \beta & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 13 dicembre 2002 — S. Lucia

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito A

T1) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore di una matrice A. Si dica che cosa significa che due matrici sono simili e che una matrice è diagonalizzabile. Si dimostri che una matrice A $(n \times n)$ che ha n autovalori distinti è diagonalizzabile. Si tratta di una condizione necessaria per la diagonalizzabilità?

T2) Si dimostri che, dato un insieme linearmente indipendente $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ in $\mathbf{C}^4$, è possibile trovare $\underline{v} \in \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ (cioè uno di essi) in modo che l'insieme $\{\underline{v}, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ sia una base di $\mathbf{C}^4$.

E1) Si consideri la base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

di $\mathbf{C}^3$ e l'unica applicazione lineare $f \colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ tale che

$$\begin{aligned} f(\underline{v}_1) &= \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3; \\ f(\underline{v}_2) &= \underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3; \\ f(\underline{v}_3) &= 3\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3. \end{aligned}$$

Si determini il rango di f e si dica se il vettore $\underline{y} = [2\ {-1}\ 1]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f$.

E2) Sia U il sottospazio di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e si scriva la matrice dell'applicazione lineare $P_U \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ (proiezione ortogonale su U) rispetto alla base canonica. Qual è il rango di P_U?

Si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \underline{w}_3, \underline{w}_4 \rangle = U$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \beta & 1-\beta & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 12 settembre 2001

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che, data una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ dello spazio $\mathbf{C}^n$, esiste una base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$ di $\mathbf{C}^n$ tale che, per $1 \leq k \leq n$, si abbia

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \rangle = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k \rangle.$$

T2) Si dia la definizione di rango di una matrice A; supposto che A abbia n righe, p colonne e rango k, si dimostri che A ha una inversa destra se e solo se ...

(Nota: completare la frase al posto dei puntini con due disuguaglianze.)

E1) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 & -\alpha \\ 0 & 1-2\alpha & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di f_α e si dica per quali valori di α il vettore $\underline{y} = [2 \ -2 \ 0]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E2) Si calcoli per quale valore di $\alpha \in \mathbf{C}$ il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ha dimensione due. Per questo valore, scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\underline{x} = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ sul sottospazio V_α e si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \underline{w}_3, \underline{w}_4 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 12 dicembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito D

T1) Sia diano le definizioni di autovalore, autovettore e autospazio relativi a una matrice A. Si dimostri che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

T2) Si dia la definizione di insieme di vettori linearmente indipendente. Si dimostri che, se $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ è un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V e $\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \rangle \neq V$, allora esiste un vettore $\mathbf{v} \in V$ tale che l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n; \mathbf{v}\}$ sia linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha+2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & \alpha+4 & \alpha+2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f \colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= 5\mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 0 & -6\beta \\ 0 & -2\beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale. Per $\beta = 0$, si calcolino

(1) una base di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$;
(2) una matrice $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{S}$ sia diagonale.

Si ricavi dalla base trovata in (1) una base ortogonale e si dica se esiste una base ortogonale di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 12 dicembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito C

T1) Sia diano le definizioni di autovalore, autovettore e autospazio relativi a una matrice A. Si dimostri che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

T2) Si dia la definizione di insieme di vettori linearmente indipendente. Si dimostri che, se $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ è un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V e $\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \rangle \neq V$, allora esiste un vettore $\mathbf{v} \in V$ tale che l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n; \mathbf{v}\}$ sia linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha - 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & \alpha & \alpha - 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= 4\mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -2\beta & 1 \\ -2\beta & 0 & 6\beta \\ 0 & 2\beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale. Per $\beta = 0$, si calcolino

(1) una base di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$;
(2) una matrice $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{S}$ sia diagonale.

Si ricavi dalla base trovata in (1) una base ortogonale e si dica se esiste una base ortogonale di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 12 dicembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito B

T1) Sia diano le definizioni di autovalore, autovettore e autospazio relativi a una matrice A. Si dimostri che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

T2) Si dia la definizione di insieme di vettori linearmente indipendente. Si dimostri che, se $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ è un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V e $\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \rangle \neq V$, allora esiste un vettore $\mathbf{v} \in V$ tale che l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n; \mathbf{v}\}$ sia linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & \alpha+3 & \alpha+1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= 3\mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 2 & -\beta & 2 \\ -\beta & 0 & 3\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale. Per $\beta = 0$, si calcolino

(1) una base di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$;
(2) una matrice $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{S}$ sia diagonale.

Si ricavi dalla base trovata in (1) una base ortogonale e si dica se esiste una base ortogonale di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 14 luglio 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito A

T1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata tale che $\mathbf{I} + \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Si dica se una tale matrice può avere autovalori reali. Si scriva una matrice 3×3 con questa proprietà.

T2) Si dimostri che una matrice quadrata $n \times n$ $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile se e solo se $\mathbb{C}^n$ ha una base formata da autovettori di $\mathbf{A}$. Si diano anche le necessarie definizioni di autovalore e autovettore.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha+1 & -\alpha-1 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & \alpha^2+3\alpha+2 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione $\mathbf{LU}$ e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $\mathbf{P}^T\mathbf{LU}$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) L'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ è definita da

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{v}_1) &= 2\alpha\mathbf{v}_1 - 2\alpha\mathbf{v}_3 \\ f_\alpha(\mathbf{v}_2) &= -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ f_\alpha(\mathbf{v}_3) &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli il rango di f_α (per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$) e si determini una base dell'immagine di f_α.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1-4\beta & -8\beta & 4\beta & 0 \\ 2\beta & 4\beta+1 & -2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 12 dicembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

Compito A

T1) Sia diano le definizioni di autovalore, autovettore e autospazio relativi a una matrice A. Si dimostri che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

T2) Si dia la definizione di insieme di vettori linearmente indipendente. Si dimostri che, se $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ è un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V e $\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \rangle \neq V$, allora esiste un vettore $\mathbf{v} \in V$ tale che l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n; \mathbf{v}\}$ sia linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & \alpha + 1 & \alpha - 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= 2\mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 7\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 1 \\ \beta & 0 & -3\beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale. Per $\beta = 0$, si calcolino

(1) una base di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$;
(2) una matrice $\mathbf{S}$ tale che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{S}$ sia diagonale.

Si ricavi dalla base trovata in (1) una base ortogonale e si dica se esiste una base ortogonale di $\mathbf{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_0$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 settembre 2008

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Domande iniziali

☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 con $\det A = 0$. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

☐ (2) Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$?

☐ (3) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ una base dello spazio vettoriale V. Esiste un vettore $\mathbf{v}_4$ tale che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ sia linearmente indipendente?

T1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata tale che $\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Si dica se una tale matrice può avere autovalori reali. Si scriva una matrice 3×3 con questa proprietà.

T2) Si dia la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare e se ne indichi un esempio importante. Si dimostri poi che ogni spazio vettoriale con prodotto scalare ammette una base ortogonale.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -\alpha & -2 \\ \alpha/2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = -4$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_{-4})$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & -1 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 1$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 settembre 2007

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $n \times n$, esista una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ -1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,
(a) si calcoli una base ortogonale di U_α;
(b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$;
(c) si trovi la proiezione ortogonale del vettore $[2i\ i\ 3\ 0]^T$ su U_α.

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2+2\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2\beta - 3 & -\beta + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona

Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale

Prova scritta di Algebra lineare — 11 settembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che, dato un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ dello spazio vettoriale V, questo è linearmente dipendente se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Si dimostri poi, dopo aver dato la definizione di base di uno spazio vettoriale finitamente generato, che ogni insieme linearmente indipendente è sottoinsieme di una base.

T2) Date le definizioni di autovalore e autovettore di una matrice, calcolare i possibili autovalori di una matrice $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} = -3\mathbf{I}$.

Si trovi un esempio di una matrice con queste proprietà e che abbia due autovalori distinti.

E1) Sia α un parametro reale e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2\alpha-2 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha^2-\alpha \\ 1 & 2 & -1 & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & 2 & \alpha^2+4\alpha & \alpha^2+3 \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 1 & \alpha^3+2\alpha & \alpha^3 \end{bmatrix}.$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ciò non è possibile, una decomposizione P^TLU. Per ogni valore di α determinare una base dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$.

E2) Si calcoli per quale valore di $\alpha \in \mathbf{C}$ il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1-2\alpha \end{bmatrix}$$

ha dimensione due. Per questo valore, scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{x} = [0\ 1\ 0\ 1]^T$ sul sottospazio V_α e si determini una base ortogonale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-4 & \beta & 2-\beta & 0 \\ 3-3\beta & 0 & \beta & 0 \\ 5\beta-9 & 2\beta-4 & 6-3\beta & 2 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per uno di questi valori si calcoli una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori della matrice.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 dicembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito D

T1) Si enunci il teorema nullità + rango e lo si applichi per dimostrare i seguenti enunciati, dove V e W sono spazi vettoriali:

(1) *Sia* $f\colon V \to V$ *un'applicazione lineare; allora* f *è iniettiva se e solo se* f *è suriettiva.*
(2) *Sia* $f\colon V \to W$ *un'applicazione lineare; se* $\dim V \neq \dim W$ *e* f *è iniettiva, allora* f *non è suriettiva.*

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice e si dimostri che, se λ_1, λ_2,..., λ_k sono autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ con autovettori rispettivamente $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k\}$ è linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-2 & 2-\alpha & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha-2 & 0 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & 0 & 2-\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia U il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ così definito:

$$U = \left\langle \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Si trovi una base ortogonale U e la si completi a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$. Si determini inoltre la proiezione ortogonale $P_U(v)$, dove $\mathbf{v} = [i \quad -1 \quad 1+i \quad 0]^T$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 1$, si trovi una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$. Se B_1 è la matrice associata a un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ rispetto alla base $\mathscr{B}$ sia sul dominio che sul codominio, si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 dicembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito C

T1) Si enunci il teorema nullità + rango e lo si applichi per dimostrare i seguenti enunciati, dove V e W sono spazi vettoriali:

(1) *Sia* $f\colon V \to V$ *un'applicazione lineare; allora* f *è iniettiva se e solo se* f *è suriettiva.*

(2) *Sia* $f\colon V \to W$ *un'applicazione lineare; se* $\dim V \neq \dim W$ *e* f *è suriettiva, allora* f *non è iniettiva.*

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice e si dimostri che, se λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ con autovettori rispettivamente $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k\}$ è linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-1 & 1-\alpha & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha-1 & 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 1 & 0 & 1-\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia U il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ così definito:

$$U = \left\langle \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Si trovi una base ortogonale U e la si completi a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$. Si determini inoltre la proiezione ortogonale $P_U(v)$, dove $\mathbf{v} = [i \quad -1 \quad 1+i \quad 0]^T$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 1$, si trovi una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$. Se B_1 è la matrice associata a un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ rispetto alla base $\mathscr{B}$ sia sul dominio che sul codominio, si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 dicembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito B

T1) Si enunci il teorema nullità + rango e lo si applichi per dimostrare i seguenti enunciati, dove V e W sono spazi vettoriali:

(1) *Sia $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare; allora f è iniettiva se e solo se f è suriettiva.*
(2) *Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare; se $\dim V \neq \dim W$ e f è suriettiva, allora f non è iniettiva.*

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice e si dimostri che, se λ_1, λ_2,..., λ_k sono autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ con autovettori rispettivamente $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k\}$ è linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 2-\alpha & \alpha-2 & 1 & 0 \\ \alpha-2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha-2 & 1 & 0 & \alpha-2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia U il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ così definito:

$$U = \left\langle \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Si trovi una base ortogonale U e la si completi a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$. Si determini inoltre la proiezione ortogonale $P_U(v)$, dove $\mathbf{v} = [i \quad -1 \quad 1+i \quad 0]^T$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 1$, si trovi una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$. Se B_1 è la matrice associata a un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ rispetto alla base $\mathscr{B}$ sia sul dominio che sul codominio, si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 dicembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito A

T1) Si enunci il teorema nullità + rango e lo si applichi per dimostrare i seguenti enunciati, dove V e W sono spazi vettoriali:

(1) *Sia* $f\colon V \to V$ *un'applicazione lineare; allora* f *è iniettiva se e solo se* f *è suriettiva.*

(2) *Sia* $f\colon V \to W$ *un'applicazione lineare; se* $\dim V \neq \dim W$ *e* f *è iniettiva, allora* f *non è suriettiva.*

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice e si dimostri che, se λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ con autovettori rispettivamente $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k\}$ è linearmente indipendente.

E1) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1-\alpha & \alpha-1 & 1 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-\alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & 0 & \alpha-1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia U il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ così definito:

$$U = \left\langle \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Si trovi una base ortogonale U e la si completi a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$. Si determini inoltre la proiezione ortogonale $P_U(v)$, dove $\mathbf{v} = [i \quad -1 \quad 1+i \quad 0]^T$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 1$, si trovi una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$. Se B_1 è la matrice associata a un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ rispetto alla base $\mathscr{B}$ sia sul dominio che sul codominio, si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Algebra lineare — 10 settembre 2003

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dia la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare e se ne indichi un esempio importante. Si dimostri poi che ogni spazio vettoriale con prodotto scalare ammette una base ortogonale.

T2) Si dia la definizione di autovalore, autovettore e autospazio di una matrice quadrata A. Si dimostri che A ha un numero finito di autovalori, λ_1, λ_2, ..., λ_r e se ne indichi un metodo per il calcolo. Nel caso particolare in cui A sia 2×2, si dia una condizione necessaria e sufficiente affinché A sia diagonalizzabile.

E1) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha - 1 & 0 & 2\alpha - 2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di f_α e si dica per quali valori di α il vettore $\underline{y} = [2\ 0\ 1]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E2) Dato il sottospazio U di $\mathbf{C}^5$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se ne determini una base ortogonale e la si completi a una base ortogonale di $\mathbf{C}^5$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 1+\beta & 2 & 0 & 2\beta - 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\beta & 1 & 0 \\ 1-\beta & -1 & 0 & 4-2\beta \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per quali valori è diagonalizzabile con una matrice reale.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 10 luglio 2003

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1	E1	
	T2	E2	
		E3	

T1) Si dimostri che, dato una insieme di vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p\}$ dello spazio $\mathbf{C}^n$ con il prodotto scalare usuale, esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_p\}$ di $\mathbf{C}^n$ tale che, per $1 \le k \le p$, si abbia

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \rangle = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k \rangle.$$

Sotto quali condizioni tutti i vettori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_p\}$ sono non nulli?

T2) Si dia la definizione di spazio nullo $N(f)$ e di immagine $\operatorname{Im}(f)$ dell'applicazione lineare $f\colon V \to W$ e si dimostri che

$$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim V - \dim N(f).$$

E1) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

sul codominio e alla base canonica sul dominio l'applicazione lineare $f_\alpha\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha & 2\alpha \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di f_α e si dica per quali valori di α il vettore $\underline{y} = [2\ 0\ 1]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E2) Si calcoli per quale valore di $\alpha \in \mathbf{C}$ il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha-1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ha dimensione tre. Per questo valore, scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\underline{x} = [0\ 0\ 0\ 1]^T$ sul sottospazio V_α e si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 2+\beta & 2 & 0 & 2\beta \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\beta & 1 & 0 \\ -\beta & -1 & 0 & 2-2\beta \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 30 marzo 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito C

T1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Si dimostri che, dato un insieme di vettori linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per ogni k, con $1 \le k \le n$,

$$\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_k \rangle.$$

T2) Sia $\mathbf{A}$ una matrice tale che $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Se ne calcolino i possibili autovalori e si dica se una tale matrice può avere tutti gli autovalori reali.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha+2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha+2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = 4\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = 5\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3(\beta+2)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4(\beta+2) & 0 & 4(\beta+2) \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = -1$, si calcolino una base ortonormale dell'autospazio relativo all'autovalore 1.

Si dica per quali valori di β la matrice $\mathbf{B}_\beta$ è unitariamente diagonalizzabile.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 5 luglio 2007

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $n \times n$, esista una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ -1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,
(a) si calcoli una base ortogonale di U_α;
(b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$;
(c) si trovi la proiezione ortogonale del vettore $[2i \ i \ 3 \ 0^T$ su U_α.

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2+2\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2\beta-3 & -\beta+1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra lineare — 4 settembre 2002

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si dimostri che, dato una insieme di vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ dello spazio V con prodotto scalare $(\cdot \mid \cdot)$, esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$ di V tale che, per $1 \leq k \leq n$, si abbia

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \rangle = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k \rangle.$$

T2) Si dia la definizione di molteplicità algebrica $m(\lambda)$ e geometrica $d(\lambda)$ dell'autovalore λ di una matrice A; si dimostri che $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$.

E1) Sia α un parametro reale; rispetto alla base ordinata

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

sul codominio e alla base canonica sul dominio l'applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^3$ ha come matrice associata

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 & -\alpha \\ 0 & 1-2\alpha & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si determini, per ogni α, il rango di f_α e si dica per quali valori di α il vettore $\underline{y} = [2 \ -2 \ 0]^T$ appartiene a $\operatorname{Im} f_\alpha$.

E2) Si calcoli per quale valore di $\alpha \in \mathbf{C}$ il sottospazio V_α di $\mathbf{C}^4$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

ha dimensione due. Per questo valore, scrivere la proiezione ortogonale del vettore $\underline{x} = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ sul sottospazio V_α e si determini una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbf{C}^4$ tale che $\langle \underline{w}_3, \underline{w}_4 \rangle = V_\alpha$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 4-\beta & 2 & 0 & 4-2\beta \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ -2+\beta & -1 & 0 & -2+2\beta \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 30 marzo 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito D

T1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Si dimostri che, dato un insieme di vettori linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ esiste un insieme ortogonale di vettori $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per ogni k, con $1 \le k \le n$,

$$\langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_k \rangle.$$

T2) Sia $\mathbf{A}$ una matrice tale che $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Se ne calcolino i possibili autovalori e si dica se una tale matrice può avere tutti gli autovalori reali.

E1) Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha+1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcoli anche una base dello spazio nullo di A_α, per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = 4\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = 5\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,$$

dove

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scrivano la matrice $\mathbf{A}$ associata a f rispetto alla base $\mathscr{B}$ (su dominio e codominio) e la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio).

Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3(\beta+1)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4(\beta+1) & 0 & 4(\beta+1) \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile e per quali valori reali di β essa è diagonalizzabile con una matrice reale.

Per $\beta = 0$, si calcolino una base ortonormale dell'autospazio relativo all'autovalore 1.

Si dica per quali valori di β la matrice $\mathbf{B}_\beta$ è unitariamente diagonalizzabile.