INTEGRALI CURVILINEI DEL PRIMO TIPO.

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua in Ω insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva regolare e semplice tale che

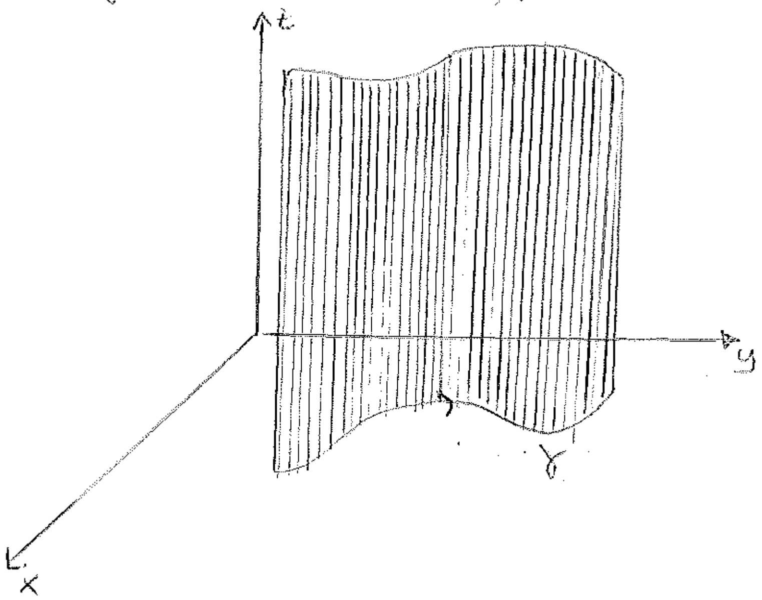
$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{per } t \in [a,b]$$

Allora l'INTEGRALE CURVILINEO di f lungo γ è definito come

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt$$

NOTA: I simboli usati per indicarlo possono essere

$$\int_\gamma f\, ds \qquad \text{oppure} \qquad \int_a^b f(r(t)) \| \dot{r}(t) \| dt$$



NOTA IMPORTANTE: L'integrale curvilineo NON dipende dalla parametrizzazione scelta per la curva, ma solo dal suo sostegno.

ESEMPIO

Calcolare $\int_\gamma f\,ds$ dove $f(x,y)=\dfrac{xy\sin y}{\sqrt{1+x^2}}$ e la curva γ è il ramo di parabola $r(t)=\left(t,\frac{t^2}{2}\right)$ per $t\in[0,\sqrt{2\pi}]$.

SVOLGIMENTO

Iniziamo con il calcolare

$$\dot{r}(t)=(1,t)$$

e

$$\|\dot{r}(t)\|=\sqrt{1+t^2}$$

A questo punto in base alla definizione abbiamo

$$\int_\gamma f\,ds=\int_0^{\sqrt{2\pi}} f(r(t))\|\dot{r}(t)\|\,dt=\int_0^{\sqrt{2\pi}}\frac{t\cdot t^2/2\cdot\sin(t^2/2)}{\sqrt{1+t^2}}\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ z=t^2/2\\ dz=t\,dt}}{=}\int_0^{\pi} z\cdot\sin(z)\,dz\underset{\substack{\uparrow\\ \text{per parti}}}{=}-z\cos z\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos z\,dz=\pi+\Big[-\sin z\Big]_0^{\pi}=$$

$$=\pi$$

Esercizio 4

Calcolare i seguenti integrali curvilinei

(a) $\displaystyle\int_\gamma y^2 ds$ dove $\gamma(t)=(t, e^t)$ con $t\in[0, \log 2]$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}\, ds$ dove $\gamma(t)=(\cos t, \sin t, t^2)$ con $t\in[0,\pi]$.

Soluzione

(a) Osserviamo che la curva $\gamma(t)$ è regolare. Infatti è derivabile con derivata continua

$$\dot\gamma(t)=(1, e^t)\neq(0,0)\quad \forall t\in(0,\log 2).$$

Calcoliamo

$$f(\gamma(t))=f(1,e^t)=e^{2t}$$

e

$$\|\dot\gamma(t)\|=\sqrt{1+e^{2t}}$$

quindi

$$\int_\gamma y^2 ds=\int_0^{\log 2} e^{2t}\sqrt{1+e^{2t}}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{(1+e^{2t})^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\log 2}=\frac{5^{3/2}-2^{3/2}}{3}$$

(b) Anche in questo caso la curva è regolare. Infatti è derivabile con derivata continua

$$\dot\gamma(t)=(-\sin t, \cos t, 2t)\neq(0,0,0)\quad \forall t\in(0,\pi).$$

Calcoliamo

$$f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t, t^2) = t$$

e

$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$z = 4t^2 \Rightarrow dz = 8t\,dt$$

quindi

$$\int_\gamma \sqrt{z}\,ds = \int_0^\pi t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{4\pi^2} \sqrt{1+z}\,dz = \frac{1}{8}\left[\frac{(1+z)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{4\pi^2} = \frac{1}{12}\left[(1+4\pi^2)^{3/2} - 1\right].$$

Esercizio 5

Calcolare $\int_\gamma f\,ds$, dove $f(x,y) = xy$ e γ è una parametrizzazione del quarto di ellisse del I° quadrante di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a, b > 0.$$

Soluzione

Una parametrizzazione del quarto di ellisse è data da

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Calcoliamo

$$f(\gamma(t)) = f(a\cos t, b\sin t) = ab\cos t\sin t$$

e

$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt = ab\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \sin^2 t}\,dt =$$

$$= ab \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}\,dt =$$

posto $z = \sin t$ da cui $dz = \cos t\,dt$ si ottiene

$$= ab \int_0^1 z\sqrt{b^2 + (a^2-b^2)z^2}\,dz = ab\left[\frac{1}{3(a^2-b^2)}\left(b^2 + (a^2-b^2)z^2\right)^{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{ab}{3}\,\frac{(a^3-b^3)}{a^2-b^2} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$$