

CALCOLO NUMERICO

Corso di laurea in Informatica

BERTELLE ROBERTO
roberto.bertelle@unipd.it

INFORMAZIONI CORSO

(1) LIBRO DI TESTO

"Luca Bergamaschi

Giovanni Zilli

Introduzione al calcolo numerico

Edizioni Progetto Padova "

(2) Lezioni in rete

→ dispense e lezioni, esami di fine anno fe.

PROPOSTA: inizio laboratorio ore 8:45
(?) una.

PROPOSTA: 1 ora in più, quando serve, il giovedì
(se possibile)
(?)

ESAME:

- (●) solo scritto (esercizi)
- (●) si può usare calcolatrice e libro di testo.

CORSO

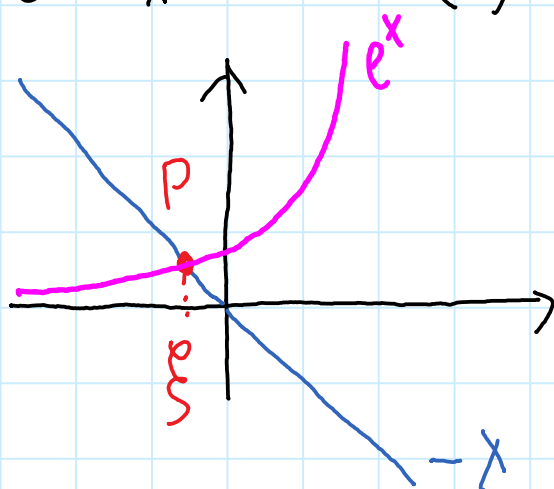
- (●) lezioni teoriche
- (●) laboratorio: implementare gli algoritmi, discuterli

Argomenti di teoria

(1) Numeri di macchine

(2) Soluzioni di equazioni non lineari.

$$e^x + x = 0 \Leftrightarrow e^x = -x$$



Imponeremo o calcolare una approssimazione di s con quante cifre voglio.

(3) Risoluzione di SISTEMI LINEARI

$$A \underline{x} = \underline{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

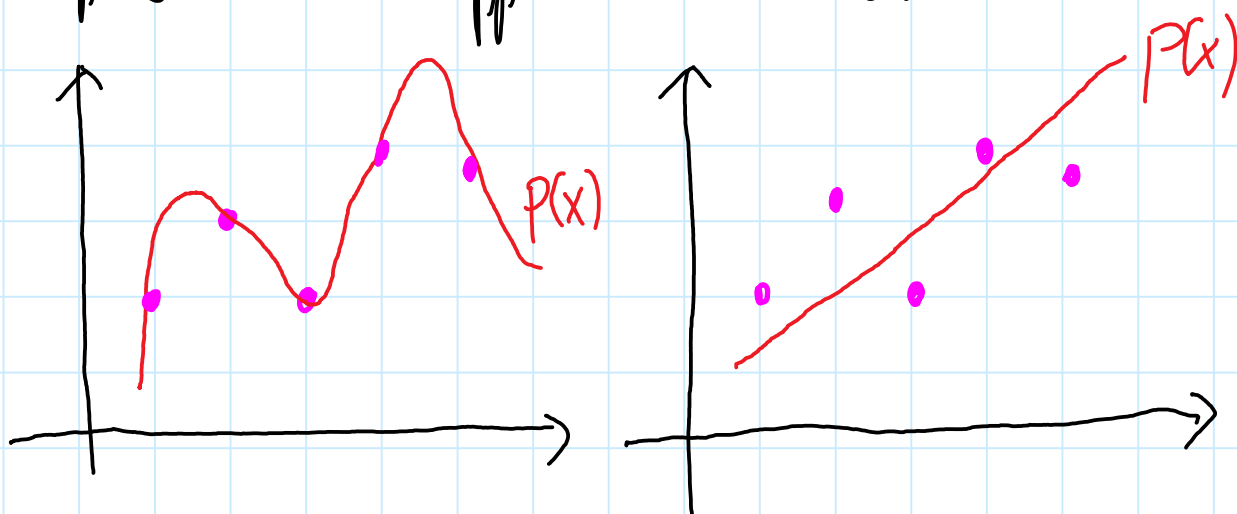
e voglio trovare $\underline{x}$.

Problemi:

(1) Come faccio a sapere che un algoritmo
porta ad una soluzione corretta??
↑
↓
NON BANALE!!

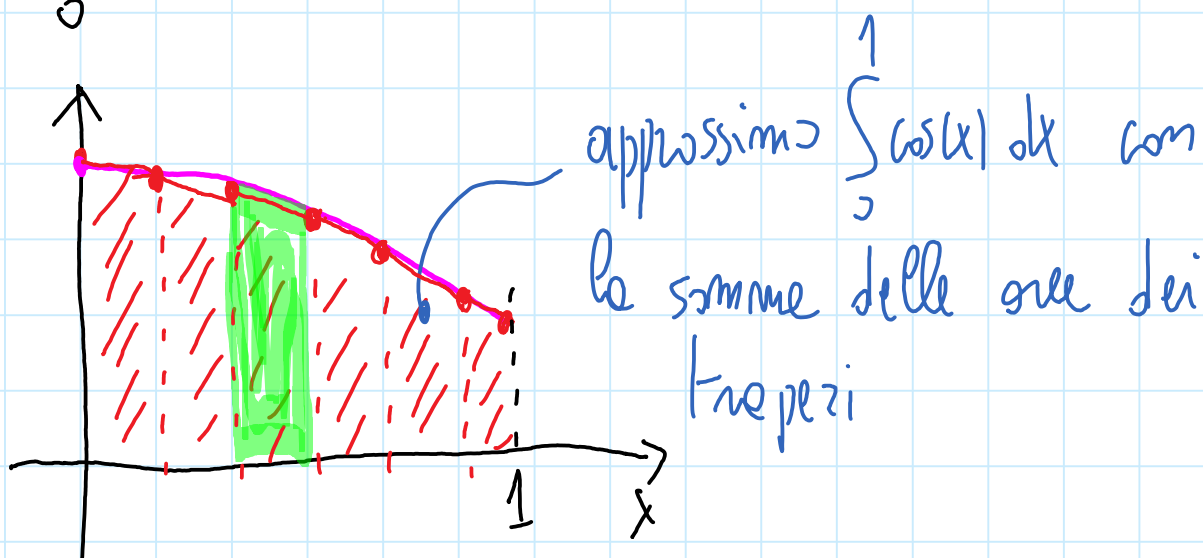
(2) Se ho una soluzione, quanto è vicina a
quella vera?
NON BANALE!!

(4) Interpolazione e approssimazione di dati



(5) Integrazione e quadrature numeriche

$$\int_0^1 \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^1 = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1)$$



PROPOSTA : preappello verso fine maggio
(?) (20 ÷ 24 / 5)

MATLAB / OCTAVE

↳ pagamento

↳ libero

(•) MOLTO USATO

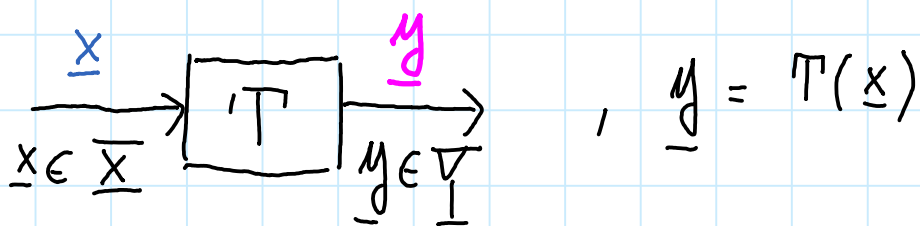
(•) PERMETTE DI METTERE A PUNTO E VERIFICARE PROGETTI COMPLESSI IN POCO TEMPO (TOOLBOX)

(MAT) (LAB) → LABORATORY
↳ MATRIX

In MATLAB TUTTO È MATRICE!!

CONDIZIONAMENTO DI UN PROBLEMA

Un problema è una TRASFORMAZIONE da uno spazio di dati ad uno spazio di risultati



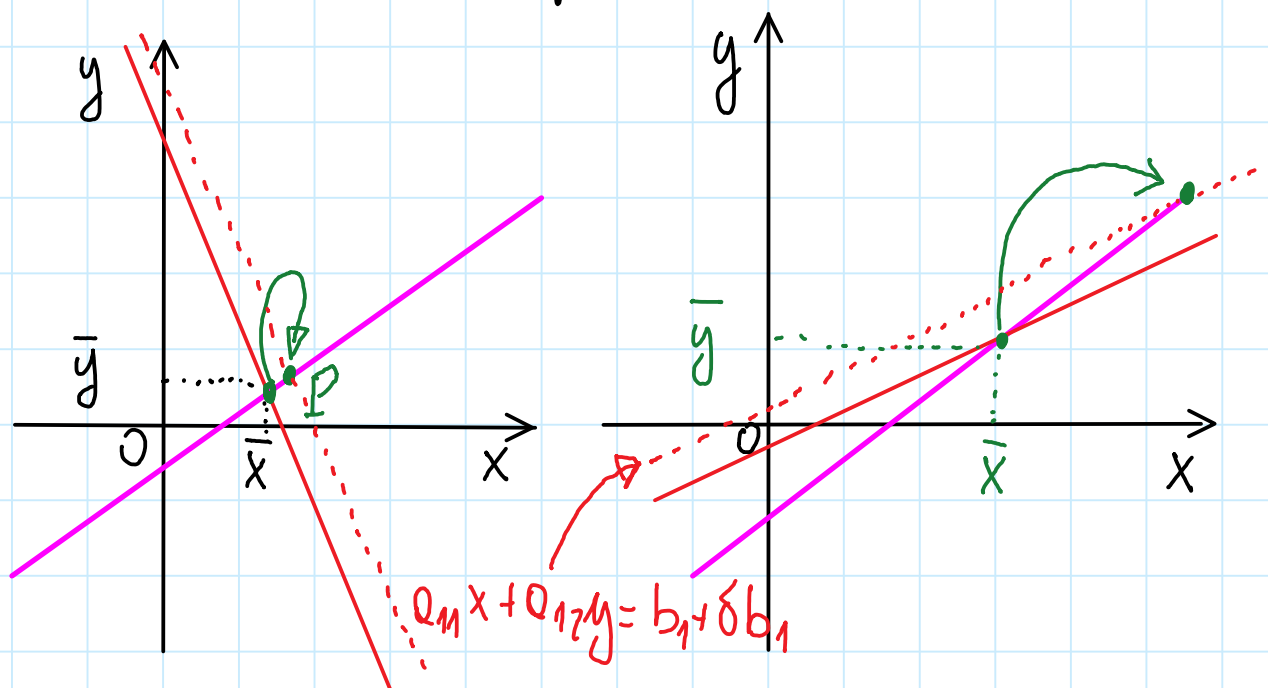
PROBLEMI BEN E MAL CONDIZIONATI

Considero un problema T . Sia $\underline{x}_0 \in \underline{X}$ dato e sia $\underline{y}_0 = T(\underline{x}_0)$. Il problema T si dice BEN CONDIZIONATO in corrispondenza del dato $\underline{x}_0$ se piccole variazioni $\delta \underline{x}$ di $\underline{x}_0$ NON modificano l'uscita $\underline{y}_0$. In caso contrario, ossia esiste almeno una $\delta \underline{x}$ che dà una grande variazione di $\underline{y}_0$, il problema si dice MAL CONDIZIONATO.

ESEMPIO Considero il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Vediamone il condizionamento.
(rispetto alle variazioni del solo b_1)



P cambia di poco $\Rightarrow$
BEN CONDIZIONATO

P cambia molto! $\Rightarrow$
MAL CONDIZIONATO!

È pressoché impossibile definire degli indici per stabilire se un problema è o meno ben condizionato.

Definiamo NUMERO DI CONDIZIONAMENTO (relativo)

$$K = \sup_{\substack{\delta \underline{x} \\ \text{ammissibili}}} \frac{\frac{\|\delta \underline{y}\|}{\|\underline{y}_0\|}}{\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}_0\|}}$$

→ cambiamento relativo dell'uscita

dove

$$\underline{y}_0 = T(\underline{x}_0)$$

$$\hat{\underline{y}} = T(\underline{x}_0 + \delta \underline{x})$$

$$\delta \underline{y} = \hat{\underline{y}} - \underline{y}_0$$

ESEMPIO Ricorriamo K per il problema di valutare la funzione $f(x)$ in x_0 ($f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \Rightarrow \|\cdot\| = |\cdot|$)

Ho

$$y_0 = f(x_0)$$

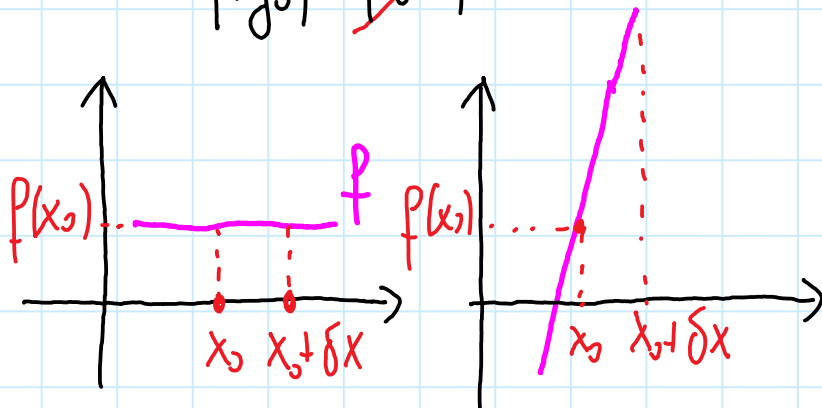
Da una piccola perturbazione a $x_0 \Rightarrow$ uscita cambia:

$$\hat{y} = f(x_0 + \delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \delta x$$

Allora è $\delta y = \hat{y} - y_0 = f'(x_0) \delta x$ e quindi

$$\bar{K} = \sup_{\delta x} \frac{\frac{|\delta y|}{|y_0|}}{\frac{|\delta x|}{|x_0|}} = \sup_{\delta x} \frac{|f'(x_0)| \cdot \cancel{|\delta x|} \cdot |x_0|}{|y_0| \cdot \cancel{|\delta x|}} =$$

$$= \frac{|x_0| \cdot |f'(x_0)|}{|f(x_0)|}$$



È ragionevole! Se $f(x_0) \approx 0$ la $f(x)$ è una
 orizzontale vicino a x_0 e quindi variazioni f in x_0
 o in $x_0 + \delta x$ non dà variazioni. Il problema è ben
 condizionato e $\bar{K} \approx 0$. Viceversa se $|f'(x_0)| \gg 1$,
 allora $\bar{K}$ è grande ed il problema è mal condizionato.

Vediamo cose successe per

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

f'

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

per cui risulta

$$\bar{K} = \frac{|x_0| \cdot |f'(x_0)|}{|f(x_0)|} = \frac{|x_0|}{\sqrt{x_0^2+1}} \leq \frac{|x_0|}{\sqrt{x_0^2}} = \frac{|x_0|}{|x_0|} = 1$$

$\Rightarrow$ sempre BEN CONDIZIONATO!

ESERCIZIO Studiare il condizionamento di

(a) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ per $x \geq 0$

(b) $f(x) = e^x$

IL SISTEMA FLOATING POINT O DEI NUMERI DI MACCHINA

I numeri reali possono essere scritti in base $\beta \geq 2$ come una successione di cifre:

$$x = \beta^e \sum_{i=1}^{+\infty} d_i \beta^{-i}$$

dove $d_i \in \{0, 1, \dots, \beta-1\}$ e $d_1 \geq 1$ con $e \in \mathbb{Z}$.
Ad esempio

$$x = \frac{1}{3} = 10^0 \cdot (3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \dots)$$

Non riesco a memorizzare TUTTE le cifre di x perché i calcolatori hanno una quantità di memoria FINITA!

Devo memorizzare "solo un po'" di queste cifre.

Devo farlo con criterio! Da qui nasce il sistema

FLLOATING-POINT.

DEF. Si chiama insieme o sistema floating point di base $\beta \geq 1$, con t cifre dopo la virgola ed esponente compreso fra L e U , numeri interi, l'insieme

$$F(\beta, t, L, U) = \{0\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \beta^e \sum_{i=1}^t d_i \beta^{-i} \right\}$$

con $L \leq e \leq U$, $d_i \in \{0, \dots, \beta-1\}$, $i=1, \dots, t$
 e $d_1 \geq 1$. (Condizione di NORMALIZZAZIONE: serve per avere univocità di scrittura dei numeri!)

PROP. L'insieme $F(\beta, t, L, U)$ soddisfa

(i) $F(\beta, t, L, U) \subset \mathbb{R}$

(ii) $x \in F(\beta, t, L, U) \Rightarrow -x \in F(\beta, t, L, U)$

(iii) $\text{card}(F(\beta, t, L, U)) = 1 + 2 \cdot (U - L + 1) \cdot (\beta - 1) \cdot \beta^{t-1}$

(iv) Sia $x > 0$. Allora

$$x_{\min} = \beta^L \cdot (1 \cdot \beta^{-1} + 0 \cdot \beta^{-2} + \dots + 0 \cdot \beta^{-t}) = \beta^{L-1}$$

$$\begin{aligned} x_{\max} &= \beta^U \left((\beta-1) \beta^{-1} + (\beta-1) \cdot \beta^{-2} + \dots + (\beta-1) \beta^{-t} \right) \\ &= \beta^U (\beta-1) \left(\beta^{-1} + \beta^{-2} + \dots + \beta^{-t} \right) \\ &= \beta^U (1 - \beta^{-t}) \end{aligned}$$

$$x_{\max} = 10^U \left(\underbrace{0.9999 \dots 9}_{t \text{ 9}} \right) +$$

$$\frac{0.0000 \dots 1}{1.0 \dots 00} =$$

ESEMPIO Disegniamo e troviamo $IF(\overset{\beta}{10}, \overset{t}{1}, \overset{L}{-1}, \overset{U}{1})$

Ho per $x > 0$

$$x = 10^e \sum_{i=1}^1 d_i 10^{-i} = 10^e d_1 10^{-1}, \quad d_1 \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

$$e \in \{-1, 0, 1\}$$

$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$
$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	1
$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	2
$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-1}$	3
$4 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-1}$	4
$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-1}$	5
$6 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-1}$	6
$7 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-1}$	7
$8 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-1}$	8
$9 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-1}$	9

NON sono equispaziali! Lo sono all'interno dei singoli valori dell'esponente e !

