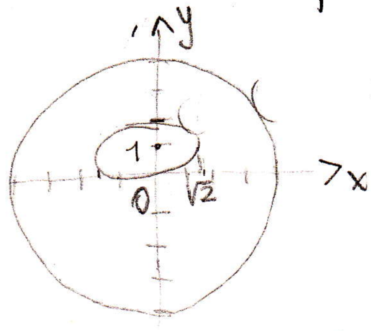
EX 2 Data la funzione $f(x,y) = x^2 + 2(y-1)^2$ e la curva vincolo di equazione $g(x,y) = x^2+y^2-16=0$

a) Rappresentare sul piano cartesiano la curva vincolo e la curva di livello della funzione f di equazione $f(x,y)=2$.



vincolo $g(x,y) = x^2+y^2-16=0$ $\quad x^2+y^2 = 4^2$ circonferenza di centro (0,0) e raggio $r=4$

curva di livello $f(x,y)=2$ $\quad x^2+2(y-1)^2 = 2$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$ ellisse di centro (0,1) e semiassi $a=\sqrt{2}$ $\quad b=1$

b) Scrivere la lagrangiana e determinare gli eventuali punti critici attraverso le condizioni di Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2+2(y-1)^2 - \lambda(x^2+y^2-16)$$

$$\begin{aligned} L_x &\\ L_y &\\ L_\lambda & \end{aligned}\begin{cases} 2x-2\lambda x=0 \\ 4(y-1)-2\lambda y=0 \\ -(x^2+y^2-16)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(1-\lambda)=0 \quad x=0 \text{ o } \lambda=1 \\ 2y-2-\lambda y=0 \\ x^2+y^2-16=0 \end{cases} \text{sse} \begin{cases} x=0 \\ \lambda = \frac{2y-2}{y} \quad y=4 \; \lambda=\frac{3}{2}, \quad y=-4 \; \lambda=\frac{5}{2} \\ y=\pm 4 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda=1 \\ 2y-2-y=0 \to y=2 \\ x^2+4-16=0 \to x=\pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

punti critici $\left(0,4,\frac{3}{2}\right)$ $\quad \left(0,-4,+\frac{5}{2}\right)$ $\quad (2\sqrt{3},2,1)$ $\quad (-2\sqrt{3},2,1)$

c) Classificare gli eventuali punti critici trovati attraverso la matrice hessiana orlata.

$$\tilde{H}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 4-2\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 2x \\ 2x & 2-2\lambda \\ 2y & 0 \end{matrix}$$

$$\det \tilde{H}(x,y,\lambda) = 0+0+0-(2y\cdot 2y(2-2\lambda)+0+2x\cdot 2x(4-2\lambda)) =$$
$$= -(2y)^2(2-2\lambda)-(2x)^2(4-2\lambda)$$