

Diario del corso di Analisi Matematica 2

G. Orlandi

a.a. 2013-14

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 2/10/13 (1 ora). Proprietà assiomatiche di una funzione distanza su un insieme: positività, simmetria, disuguaglianza triangolare. Spazi metrici. Esempi: \mathbb{R} ed \mathbb{R}^n dotati della distanza euclidea. Distanza indotta dalla norma ℓ^1 su \mathbb{R}^n . Distanza geodetica tra due punti sulla sfera: è la lunghezza dell'arco di cerchio massimo che unisce i punti dati.

Lezione del 4/10/13 (2 ore).

Proprietà assiomatiche di una norma su uno spazio vettoriale: positività, positiva 1-omogeneità, disuguaglianza triangolare. Esempi: il valore assoluto su \mathbb{R} , la norma euclidea $\|\cdot\|$ su \mathbb{R}^n . Definizione di norma ℓ^∞ su \mathbb{R}^n : per $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si pone $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$. Definizione di norma ℓ^1 su \mathbb{R}^n : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Nel caso di una matrice $A = [a_{ij}]$ la norma ℓ^1 è data da $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$. Si ha $\|A \cdot B\|_1 \leq \|A\|_1 \cdot \|B\|_1$, ossia la norma ℓ^1 è *compatibile* con il prodotto di matrici.

Una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale V induce una distanza d su V definita da $d(x, y) = \|x - y\|$ per $x, y \in V$. Se V è uno spazio euclideo, dotato cioè di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quest'ultimo definisce una norma (detta norma euclidea) $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$.

Lo spazio vettoriale $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ delle funzioni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ può essere dotato della norma ℓ^∞ (detta norma della convergenza uniforme) definita da $\|f\|_{\ell^\infty} \equiv \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in [a, b]\}$. Posto $M = \|f\|_\infty$, il grafico di f risulta confinato nel rettangolo $[a, b] \times [-M, M]$. Si può definire su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ anche la norma ℓ^1 (detta norma della convergenza in media) ponendo $\|f\|_{\ell^1} \equiv \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$. Definizione di norma ℓ^2 su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$:

$$\|f\|_{\ell^2} \equiv \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Si tratta di una norma euclidea, indotta dal prodotto scalare $\langle f, g \rangle_{\ell^2} = \int_a^b f(t)g(t)dt$, definito per $f, g \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$. Questa norma (detta della convergenza in media

quadratica) è spesso usata in problemi di minima distanza (cfr. *metodo dei minimi quadrati*).

Osservazione: sia $g \in C^0([a, b])$, $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e $\int_a^b g(x)dx = 0$. Allora $g(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Da ciò discende che se $f \in C^0([a, b])$ ha norma ℓ^1 (o ℓ^2) nulla, allora necessariamente $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Osservazione: $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ (e in genere gli spazi di funzioni che si considerano in analisi) è uno spazio vettoriale infinito dimensionale: infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $E_n = \{1, x, \dots, x^n\}$ è linearmente indipendente, in quanto una combinazione lineare non nulla di elementi di E è un polinomio, e per il Teorema fondamentale dell'Algebra si annulla solo in un numero finito di punti (inferiore o uguale ad n), e non può pertanto coincidere con la funzione identicamente nulla su $[a, b]$.

Una motivazione dell'uso della norma ℓ^2 (o in generale, di una distanza euclidea) per problemi di minima distanza (generalizzazione del *metodo dei minimi quadrati*, in uso ad es. per il calcolo di regressioni lineari in statistica, l'approssimazione mediante sviluppi di Fourier, la codifica JPEG di immagini,...) è dovuto al fatto che la soluzione è unica e si caratterizza attraverso una proiezione ortogonale.

Esempio: approssimazione di una funzione $f \in C^0([a, b])$ mediante polinomi di grado (inferiore o uguale a) n . Il polinomio P che realizza la minima distanza (ovvero la migliore approssimazione in media quadratica) di f è la proiezione ortogonale di f (rispetto al prodotto scalare ℓ^2) sul sottospazio finito-dimensionale $V := \text{span}\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$, dove per $i = 0, 1, \dots, n$ si è posto $v_i(x) = x^i$, $x \in [a, b]$. Pertanto, il polinomio P è dato da

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \langle f, Q_i \rangle_{\ell^2([a,b])} \cdot Q_i(x) = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b f(t)Q_i(t)dt \right] \cdot Q_i(x), \quad x \in [a, b],$$

dove $\{Q_i\}_{i=0, \dots, n}$ è una base ortonormale di V , costruibile applicando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ di V . A lezione è stato svolto il caso particolare $[a, b] = [-1, 1]$, $n = 1$, dove si ha $Q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $Q_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$.

Lezione del 7/10/13 (2 ore). Nozione di limite di successione in uno spazio metrico (X, d) : dati $x_n, x_0 \in X$, si dice che $x_n \rightarrow x_0$ in X se $d(x_n, x_0) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Definizione di funzione continua tra spazi metrici: $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ è continua in $x_0 \in X$ se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Caratterizzazione della continuità: $f : X \rightarrow Y$ è continua in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$ in X si ha $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ in Y .

Due distanze d_1 e d_2 su X si dicono *equivalenti* se per ogni successione $\{x_n\} \subset X$ tale che $d_1(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0$ si ha $d_2(x_n, x_0) \rightarrow 0$ e viceversa, ossia se sono equivalenti rispetto all'operazione di limite.

Analogamente, due norme su uno spazio vettoriale V si dicono *equivalenti* se le distanze associate sono equivalenti. Sussiste la seguente caratterizzazione: due norme N_1, N_2 su V sono equivalenti se e solo se esistono delle costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che

per ogni $v \in V$ si abbia $N_2(v) \leq C_1 \cdot N_1(v)$ e $N_1(v) \leq C_2 \cdot N_2(v)$ (ovvero la norma N_1 controlla la norma N_2 e viceversa).

In \mathbb{R}^n (o in uno spazio vettoriale normato finito dimensionale) *tutte* le norme sono equivalenti. In particolare per $v \in \mathbb{R}^n$ si ha (a lezione abbiamo visto il caso $n = 2$):

$$\|v\|_\infty \leq \|v\| \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{n}\|v\| \leq n\|v\|_\infty.$$

Abbiamo dimostrato a lezione che le norme ℓ^∞ ed ℓ^1 su $C^0([a, b])$ *non sono equivalenti*: infatti, per ogni $C > 0$ esiste almeno una funzione $f \equiv f_C$ tale che $\|f\|_\infty > C\|f\|_1$, pertanto in $C^0([a, b])$ la norma ℓ^1 non controlla la norma ℓ^∞ .

Esempio di una funzione continua su $C^0([a, b])$: la funzione $T : C^0([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow C^0([a, b]; \mathbb{R})$ che associa ad f la sua funzione integrale $T(f)$ definita da $T(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una funzione continua rispetto alla norma ℓ^∞ . Infatti, si ha la seguente stima:

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(g)(x)| &= |T(f - g)(x)| = \left| \int_a^x [f(t) - g(t)] dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f(t) - g(t)| dt \leq \int_a^x \|f - g\|_\infty dt \\ &\leq \|f - g\|_\infty \cdot (x - a) \quad \forall a \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Passando al sup su $x \in [a, b]$ ad ambo i membri, si ricava

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq (b - a)\|f - g\|_\infty,$$

da cui si deduce che, posto $g = f_n$, se $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$, allora $\|T(f) - T(f_n)\|_\infty \rightarrow 0$, in altre parole si ha la continuità della funzione T .

Lezione del 9/10/13 (1 ora). Definizione di convergenza uniforme: date $f, f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che le f_n convergono uniformemente ad f in I se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\ell^\infty(I)} = 0.$$

Definizione di convergenza puntuale: le f_n convergono puntualmente ad f in I se $\forall x \in I, \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0$.

La convergenza uniforme implica quella puntuale, mentre il viceversa non è vero in generale: si prenda ad esempio $I = [0, 1]$, $f_n(x) = n \cdot x$ per $0 \leq x \leq 1/n$, $f_n(x) = 2 - n \cdot x$ per $1/n \leq x \leq 2/n$, e $f_n(x) = 0$ per $2/n \leq x \leq 1$. Si ha $f_n(x) \rightarrow 0$ per ogni $x \in I$, ma $\|f_n\|_\infty = 1 \forall n$, per cui non vi può essere convergenza uniforme alla funzione identicamente nulla.

Proprietà della convergenza uniforme: siano $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\|f_n - f\|_{\ell^\infty(I)} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

1) se le f_n sono continue, allora f è continua.

2) se $I = [a, b]$, $\lim_n \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_n f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ (passaggio al limite sotto il segno di integrale).

3) se $f_n \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ (ossia $f_n, f'_n \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$) e $f_n \rightarrow f, f'_n \rightarrow g$ uniformemente in $[a, b]$, allora $g = f'$ su $[a, b]$.

Nel caso particolare delle serie di funzioni, cioè quando $f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$, con $u_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, le proprietà della convergenza uniforme si traducono come segue: date $u_k \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$, se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$, allora converge ad una funzione continua. Inoltre, vale

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(t) dt \quad (\text{integrazione per serie}).$$

Se inoltre $u_k \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ e $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$ allora

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k(x) \quad (\text{derivazione per serie}).$$

Applicazione di 2) : dato che per una serie di potenze vale il teorema di integrazione per serie, si può calcolare ad esempio

$$\int_a^b e^{-x^2} dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (b^{2k+1} - a^{2k+1})}{(2k+1)k!}.$$

Alcuni semplici esempi mostrano come la convergenza puntuale non sia sufficiente in generale, a garantire la validità dei passaggi al limite 1) 2) e 3).

Lezione dell' 11/10/13 (2 ore). Dimostrazione dei punti 1) 2) 3) della lezione precedente:

2) Dall'esempio della lezione precedente sulla continuità della trasformata integrale T si deduce, ponendo $g = f_n$ ed $x = b$, che

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt \right| = |T(f)(b) - T(f_n)(b)| \leq (b-a) \cdot \|f_n - f\|_{\ell^\infty([a,b])} \rightarrow 0$$

3) Si ha $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t) dt$, ed il primo membro converge a $f(x) - f(a)$ perchè le f_n in particolare convergono puntualmente, mentre il secondo membro converge a $\int_a^x g(t) dt$ per la convergenza uniforme di f'_n su $[a, b]$ ed il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Per il Teorema fondamentale del calcolo ne consegue $f' = g$.

1) Per ogni $\epsilon > 0$ si ha, per ogni $n > n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$. Sia $x_0 \in [a, b]$ e fissato $n > n_0$, sia $\delta > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ per $|x - x_0| < \delta$ (tale δ esiste per la continuità di f_n). Allora, per ogni $x \in [a, b]$, $|x - x_0| < \delta$, si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 3\epsilon,$$

ovvero f è continua in x_0 , per ogni $x_0 \in [a, b]$.

Successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Una successione convergente è di Cauchy. Spazi metrici completi: sono quelli in cui tutte le successioni di Cauchy convergono. Esempi: \mathbb{R} ed \mathbb{R}^n , con la distanza euclidea (o una qualunque norma), $C^0([a, b])$ dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$.

Osservazione: lo spazio $C^0([a, b])$ non è completo rispetto alla convergenza in media, o in media quadratica: si consideri ad esempio la successione $f_n \in C^0([-1, 1])$ e la funzione discontinua f definite rispettivamente da $f_n(x) = 0$ se $-1 \leq x \leq -1/n$, $f_n(x) = nx + 1$ se $-1/n \leq x \leq 0$, $f_n(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 1$, e da $f(x) = 0$ per $-1 \leq x < 0$ e $f(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 1$. Si ha $\|f_n - f\|_1 = \int_{-1/n}^0 (nx + 1) dx = 1/2n \rightarrow 0$. Quindi f_n è una successione di Cauchy rispetto alla norma ℓ^1 (in quanto successione convergente), ma il limite f non è una funzione continua.

Completamento di uno spazio metrico (X, d) : è uno spazio metrico completo (\hat{X}, \hat{d}) tale che $X \subset \hat{X}$ e $\hat{d}(x, y) = d(x, y)$ per $x, y \in X$, ed inoltre per ogni $\hat{x} \in \hat{X}$ esiste $x_n \in X$ tale che $x_n \rightarrow \hat{x}$ in \hat{X} . Ogni spazio metrico ammette un completamento, ad esempio \mathbb{R} , costruito attraverso le sezioni di Dedekind è il completamento di \mathbb{Q} .

Il completamento di $C^0([a, b])$ rispetto alla norma L^1 è lo spazio delle funzioni sommabili secondo Lebesgue $L^1([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)| dx < +\infty\}$. Analogamente, il completamento rispetto alla norma L^2 è lo spazio $L^2([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty\}$ delle funzioni a quadrato sommabile secondo Lebesgue.

Uno spazio normato completo si dice spazio di Banach. Uno spazio vettoriale completo rispetto ad una norma euclidea si dice spazio di Hilbert. Lo spazio \mathbb{R}^n è di Banach rispetto ad una qualunque norma, e di Hilbert rispetto alla norma euclidea. Gli spazi $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ e $(L^1([a, b]), \|\cdot\|_1)$ sono di Banach, lo spazio $(L^2([a, b]), \|\cdot\|_2)$ è di Hilbert.

In questi spazi si ambientano svariati problemi dell'Analisi Matematica: problemi di ottimizzazione (ad esempio, problemi di minima distanza), equazioni differenziali, ecc. Le soluzioni di questi problemi sono spesso rappresentate sotto forma di *serie di funzioni*, quali ad esempio le serie di potenze e le serie di Fourier.

Un criterio utile per la convergenza uniforme di una serie di funzioni è il criterio di convergenza totale (di Weierstrass). Lo enunciamo nel quadro più generale degli spazi normati.

Teorema della convergenza totale: sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato completo. Sia $\{u_k\} \subset X$. Se la serie delle norme $\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|$ è convergente in \mathbb{R} , allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ è convergente in X , ovvero $\lim_n \|\sum_{k=n}^{\infty} u_k\| = 0$.

Dimostrazione: detta $y_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la successione delle somme parziali, dimostriamo che $\{y_n\}$ è di Cauchy in X : si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$\|y_n - y_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|u_k\| < \epsilon \quad \text{per ogni } m > n > n_0,$$

dato che la successione numerica $s_n = \sum_{k=0}^n \|u_k\|$ è di Cauchy in \mathbb{R} per ipotesi, e $\sum_{k=n+1}^m \|u_k\| = s_m - s_n$. \square

Applicazioni del criterio di convergenza totale: in \mathbb{R} ed in \mathbb{C} corrisponde al criterio di convergenza assoluta. Esempi in $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, lo spazio delle matrici quadrate di ordine n , dotato della norma $\|\cdot\|_1$: esponenziale di matrice e serie di Neumann.

Esponenziale di matrice: Rimane ben definita, per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $\exp(A) \equiv e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, dato che per la serie delle norme si ha $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|_1^k = e^{\|A\|_1} < +\infty$. La matrice $\exp(A)$ entra in gioco nella risoluzione del sistema di equazioni differenziali $\dot{X} = A \cdot X$, con $X = X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. La soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $X(0) = X_0$ è data infatti da $X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$.

Serie di Neumann: per $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 < 1$, rimane ben definita la serie (detta *di Neumann*) $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ per il criterio di convergenza totale, essendo $\sum \|A^k\|_1 \leq \sum \|A\|_1^k < +\infty$. Si ha inoltre l'identità $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$, dato che vale

$$(I - A) \sum_{k=0}^n A^k = I - A^{n+1} \rightarrow I \quad \text{per } n \rightarrow +\infty, \quad \text{essendo } \|A^{n+1}\|_1 \leq \|A\|_1^{n+1} \rightarrow 0.$$

La serie di Neumann è utile per risolvere sistemi lineari del tipo $\lambda X - A \cdot X = C$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}^n$.

Lezione del 14/10/13 (2 ore). Applicazione del criterio di convergenza totale alla convergenza delle serie di potenze.

Ricordiamo che per un numero complesso $c = a + ib \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ si definisce la norma euclidea $|c| = \sqrt{c \cdot \bar{c}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Esempi: la serie che definisce l'*esponenziale complesso* $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$, essendo che la serie delle norme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k = e^{|z|} < +\infty$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dalla definizione di esponenziale complesso si possono dedurre in particolare le formule di Eulero $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Analogamente, la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge, per $|z| < 1$ (ovvero nel disco aperto del piano $B_1 = \{x^2 + y^2 < 1\}$), alla funzione $(1 - z)^{-1}$ (stessa dimostrazione che nel caso reale).

Dati $z_0, c_k \in \mathbb{C}$, sia $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k$ una serie di potenze complesse centrata in $z_0 \in \mathbb{C}$, e sia $r > 0$ il suo raggio di convergenza, ovvero $r^{-1} = \limsup_k |c_k|^{1/k}$. La serie converge uniformemente in $\bar{B}_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq R\}$ per ogni $0 < R < r$, e quindi in particolare converge ad una funzione continua sul disco aperto $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$.

Dimostrazione: si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{|z-z_0| \leq R} |c_k| \cdot |z - z_0|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| R^k < +\infty,$$

poichè per il criterio della radice

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k| R^k} = \left(\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \right) \cdot R = r^{-1} R < 1.$$

Si può dunque applicare il criterio di convergenza totale nello spazio metrico completo $C^0(\bar{B}_R(z_0); \mathbb{C})$, dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$ definita, per $f \in C^0(\bar{B}_R(z_0), \mathbb{C})$, da $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|, |z - z_0| \leq R\}$. \square

Osservazione: le stesse proprietà di convergenza si ottengono ovviamente per la serie di potenze reale $\sum a_k(x - x_0)^k$ su $[x_0 - R, x_0 + R]$ per ogni $R < r$, dove $r > 0$ è il raggio di convergenza della serie. In particolare, per una serie di potenze vale il teorema di integrazione per serie.

Inoltre, dato che la serie delle derivate di una serie di potenze è a sua volta una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza, vale anche il teorema di derivazione per serie. Iterando il ragionamento si deduce che una serie di potenze converge ad una funzione di classe C^∞ (ovvero dotata di derivate continue di ogni ordine). Si può inoltre facilmente verificare che, detta $f(z) = \sum c_k(z - z_0)^k$, si ha $c_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, ossia la serie di Taylor di f converge ad f (si dice in tal caso che f è una funzione *analitica*, ovvero di classe C^ω).

Osservazione: la regola di derivazione per serie di potenze può essere utilizzata ad esempio per la ricerca di soluzioni $y(x)$ di equazioni differenziali sotto forma di serie di potenze $y(x) = \sum a_k x^k$ (esempio: equazioni lineari a coefficienti polinomiali come l'equazione di Bessel (di ordine n) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2)y = 0$, equazioni non lineari a coefficienti analitici come l'equazione del pendolo semplice $y'' = -\sin y$), trasformando l'equazione differenziale in un sistema triangolare per i coefficienti a_k o sfruttando l'identità $a_k = y^{(k)}(0)/k!$.

Lezione del 16/10/13 (2 ore). Teorema: $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$ è completo. Discende dal fatto che $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ è un sottospazio chiuso dello spazio metrico completo $L^\infty([a, b]; \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|_\infty < +\infty\}$, lo spazio delle funzioni limitate su $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Dimostrazione della completezza di $L^\infty([a, b]; \mathbb{R})$: data una successione di Cauchy $\{f_n\} \subset L^\infty([a, b]; \mathbb{R})$, per ogni $\epsilon > 0 \exists n_0$ tale che $\forall n, m > n_0 \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$. In particolare, per ogni $a \leq x \leq b$ si ha $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, dunque $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R} \forall a \leq x \leq b$, ed è dunque convergente per la completezza di \mathbb{R} . Detto $f(x) = \lim_m f_m(x)$, si ha $|f_n(x) - f(x)| = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \forall n > n_0, \forall a \leq x \leq b$. Passando al sup su $x \in [a, b]$ si ottiene $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon \forall n > n_0$, ovvero $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Inoltre, $f \in L^\infty([a, b]; \mathbb{R})$ poichè $\|f\|_\infty \leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty \leq \epsilon + \|f_{n_0}\|_\infty < +\infty$. \square

Inoltre, se $f_n \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ allora $f_n \in L^\infty([a, b]; \mathbb{R})$ in quanto f_n ammettono massimo e minimo su $[a, b]$ per il Teorema di Weierstrass, e $C^0([a, b])$ è chiuso rispetto alla convergenza uniforme poichè il limite uniforme f delle funzioni continue f_n è una

dunzione continua. Pertanto la successione $\{f_n\}$ converge in $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ rispetto alla norma L^∞ . \square

Il principio delle contrazioni in uno spazio metrico completo (teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli): dato (X, d) spazio metrico completo, $T : X \rightarrow X$ una contrazione (ossia $\exists K < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq K \cdot d(x, y) \forall x, y \in X$), allora esiste un'unico punto fisso $\bar{x} \in X$ di T (ovvero un'unica soluzione \bar{x} in X dell'equazione $x = T(x)$).

La dimostrazione è costruttiva, mediante uno schema iterativo, e fornisce anche una stima quantitativa dell'errore. Sia $x_0 \in X$, definiamo per ricorrenza la successione $x_{n+1} = T(x_n)$, per $n \in \mathbb{N}$. Due i casi: o $x_{n+1} = x_n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$, e quindi $x_n = x_{n+1} = T(x_n)$ è punto fisso di T , oppure rimane definita una successione $\{x_n\} \subset X$, che risulta essere di Cauchy in X . Infatti, si ha

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq K \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq K^n \cdot d(x_1, x_0),$$

da cui si deduce che, per $m > n + 1 > n_0$, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{m-1} K^j \cdot d(x_1, x_0) = K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{m-n-1} K^j \\ &\leq K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{\infty} K^j \leq K^{n_0} \frac{d(x_1, x_0)}{1-K} < \epsilon \end{aligned}$$

per n_0 sufficientemente grande, e per ogni $m > n + 1 > n_0$, ovvero $\{x_n\}$ è di Cauchy in X . Sia $\lim_m x_m = \bar{x} \in X$ per la completezza di X .

Passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ nella disuguaglianza precedente, si ottiene la stima dell'errore $d(\bar{x}, x_n) \leq K^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-K}$. Inoltre, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ nella relazione di ricorrenza $x_{n+1} = T(x_n)$, dato che $x_{n+1} \rightarrow \bar{x}$ e $T(x_n) \rightarrow T(\bar{x})$ per la continuità di T (data dalla condizione di Lipschitz $d(T(\bar{x}), T(x_n)) \leq K \cdot d(\bar{x}, x_n)$), si deduce $\bar{x} = T(\bar{x})$, e dunque \bar{x} è un punto fisso di T .

Supponendo $\hat{x} \in X$ sia un qualunque punto fisso di T , si ha $d(\hat{x}, \bar{x}) = d(T(\hat{x}), T(\bar{x})) \leq K \cdot d(\hat{x}, \bar{x})$, ossia $(1-K) \cdot d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$, da cui $d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$ e dunque $\hat{x} = \bar{x}$, ovvero l'unicità del punto fisso. \square

Il principio delle contrazioni si applica nelle più svariate situazioni: ad esempio, per dimostrare il Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale per soluzioni di problemi di Cauchy (per equazioni e sistemi di equazioni differenziali), oppure il Teorema del Dini delle funzioni implicite/inverse (esistenza e unicità locale per soluzioni di sistemi di equazioni algebriche non lineari), o anche per provare la dipendenza continua delle soluzioni di equazioni differenziali dai dati del problema. Inoltre, gli aspetti costruttivi e la stima quantitativa dell'errore hanno numerose applicazioni numeriche.

Seguono alcuni esempi solo accennati a lezione.

Esempio: problema di Cauchy per sistemi differenziali lineari omogenei ed esponenziale di matrice. Data A matrice $n \times n$, si consideri il problema di Cauchy dato dal sistema di n equazioni differenziali $y' = Ay$, con la condizione iniziale $y(0) = y_0$. Detta $y : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la soluzione, integrando su $[0, t]$ ambo i membri del sistema di equazioni differenziali e tenendo conto della condizione iniziale, si ottiene che $y(t)$ verifica l'equazione di punto fisso $y = Ty$, dove la trasformazione $T : C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^n)$ è definita da $Ty(t) = y_0 + \int_0^t A \cdot y(s) ds$. Si ha

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{L^\infty([-\delta, \delta])} = \left\| \int_0^t A(y_1(s) - y_2(s)) ds \right\|_{L^\infty([-\delta, \delta])} \leq \delta \|A\|_1 \cdot \|y_1 - y_2\|_{L^\infty([-\delta, \delta])},$$

ossia T è una contrazione sullo spazio metrico completo $C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^n)$ dotato della norma L^∞ non appena $\delta \cdot \|A\|_1 < 1$. Inizializzando lo schema iterativo ponendo $y_0(t) = y_0$ per $-\delta \leq t \leq \delta$, si ottiene $y_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} t^k A^k y_0$, che converge alla soluzione

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} y_0 = \exp(tA) \cdot y_0, \quad (\text{nota: } \forall t \in \mathbb{R}),$$

dove $\exp(tA) = e^{tA}$ è l'esponenziale della matrice tA .

Esempio: metodo di Newton (o delle tangenti) per il calcolo degli zeri di una funzione non lineare $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo $f \in C^2([a, b])$, e che per un certo $a < \bar{x} < b$ si abbia $f(\bar{x}) = 0$, che inoltre sia $|f'(x)| \geq m > 0$, $|f''(x)| \leq \delta$ e $|f(x)| \leq Km^2\delta^{-1} \forall x \in [a, b]$, per un certo $K < 1$.

Lo schema di Newton per la determinazione di \bar{x} consiste nella seguente successione definita per ricorrenza: fissato $a < x_0 < b$, si pone, per $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = T(x_n),$$

ed in particolare si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = T(x)$. Essendo $|T'(x)| = \frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} \leq K$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha, per il teorema del valor medio,

$$|T(y_1) - T(y_2)| = |T'(\xi)| \cdot |y_2 - y_1| \leq K|y_2 - y_1| \quad \forall y_1, y_2 \in [a, b],$$

ovvero T è una contrazione. Inoltre vale la stima dell'errore

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |T(x_n) - \bar{x}| \leq \frac{\delta}{2m} |x_n - \bar{x}|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ovvero } \forall x_n \in [a, b]),$$

da cui si deduce che se $\min\{|a - \bar{x}|, |b - \bar{x}|\} \geq \frac{\delta}{2m} \max\{|a - \bar{x}|^2, |b - \bar{x}|^2\}$ vale $T([a, b]) \subset [a, b]$ (in soldoni, $|a - \bar{x}|$ e $|b - \bar{x}|$ devono avere lo stesso ordine di grandezza, inferiore a $\frac{2m}{\delta}$), e per il principio delle contrazioni lo schema di Newton converge a \bar{x} .

(Nota: per le ipotesi su f' , questa ha un segno definito su $[a, b]$. Se anche f'' ha un segno definito su $[a, b]$, allora, se è ad esempio $f'(x) \geq m$ e $f''(x) \geq 0$, si ha

automaticamente $T([\bar{x}, b]) \subset [\bar{x}, b]$, ovvero lo schema di Newton è monotono decrescente se $\bar{x} < x_0 \leq b$.

Lezione del 18/10/13 (2 ore). Sviluppi in serie di Fourier per funzioni 2π -periodiche. Motivazioni: risoluzione di equazioni differenziali della fisica matematica (ad esempio l'equazione del calore), analisi in frequenza, approssimazione e codifica di segnali ed immagini (JPEG), ovvero funzioni che presentano tipicamente delle zone di discontinuità insieme a regioni in cui possono essere molto regolari. Ad una funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$ si associa la funzione $S_n(f)$ che rappresenta la migliore approssimazione in norma $L^2([-\pi, \pi])$ di f mediante polinomi trigonometrici di grado (inferiore o uguale a) n , ovvero un elemento del sottospazio $(2n + 1)$ -dimensionale $\mathcal{P}_n \subset L^2([-\pi, \pi])$ dato da

$$\mathcal{P}_n = \text{span} \langle 1, \cos kt, \sin kt \rangle_{k=1, \dots, n} .$$

Dato che questa base di \mathcal{P}_n è ortogonale, si ottiene la formula di rappresentazione

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \text{ con i coefficienti di Fourier di } f \text{ dati da}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Teorema di Fourier: se $f \in L^2([-\pi, \pi])$ (ad es. f continua a tratti) allora $\|f - S_n(f)\|_{L^2([-\pi, \pi])} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, ovvero la serie di Fourier di f , definita da $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)$ converge in media quadratica ad f .

Osservazione: la norma L^2 (come la norma L^1), essendo una norma integrale, non distingue due funzioni i cui valori differiscono su un numero finito di punti del dominio (in particolare una almeno delle due funzioni non può essere continua), quindi non è una norma in senso stretto su $L^2([a, b])$ (rispettivamente $L^1([a, b])$), mentre lo è in senso stretto su $C^0([a, b])$. Il Teorema di Fourier afferma che la differenza in norma L^2 tra la serie di Fourier di f e la funzione stessa f è nulla: per quanto osservato, questo non significa a priori che la serie di Fourier converga puntualmente ad f su tutto l'intervallo $[-\pi, \pi]$. Esempio (onda quadra): sia f definita da $f(x) = 1$ se $0 < x < \pi$, $f(x) = -1$ se $-\pi < x < 0$ e siano $f(0), f(\pm\pi)$ definite ad arbitrio. La serie di Fourier di f converge puntualmente ad f per $x \neq 0, \pm\pi$. Inoltre, in $0, \pm\pi$ la sua somma vale zero, indipendentemente dai valori assunti da $f(0), f(\pm\pi)$.

Proprietà delle serie di Fourier. Diseguaglianza di Bessel:

$$\|f - S_n(f)\|_{L^2([-\pi, \pi])}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \left(\pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare, facendo tendere $n \rightarrow +\infty$ si ricava il decadimento a zero dei coefficienti di Fourier $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ (Lemma di Riemann-Lebesgue). Dal Teorema di Fourier si ottiene inoltre l'identità di Parseval (alias Teorema di Pitagora in

$L^2([-\pi, \pi])$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Forma complessa dei coefficienti di Fourier: posto $c_j = \frac{a_j - ib_j}{2}$, $c_{-j} = \frac{a_j + ib_j}{2}$ per $j > 0$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$, si ha

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{ikt}, \quad \text{con } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Coefficienti di Fourier della derivata: sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$ derivabile con derivata $f' \in L^2([-\pi, \pi])$. Detti a_k, b_k (o, in forma complessa, c_k) i coefficienti di Fourier di f , e rispettivamente α_k, β_k e γ_k i coefficienti di Fourier di f' si ha la relazione $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k = kb_k$, $\beta_k = ka_k$ e $\gamma_k = (-ik)c_k$, ossia ad un'operazione differenziale su f (nello spazio "fisico") corrisponde un'operazione algebrica (moltiplicazione) sui suoi coefficienti di Fourier (nello spazio delle "frequenze").

Dall'identità di Parseval per la derivata si ottiene in particolare

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt,$$

da cui si deduce che quanto più una funzione è regolare (ossia quante più derivate possenga) tanto più rapido è il decadimento a zero dei suoi coefficienti di Fourier.

Lezione del 21/10/13 (2 ore). Convergenza puntuale delle serie di Fourier: se (l'estensione periodica di) f è continua a tratti in \mathbb{R} (e le discontinuità sono di tipo salto), e per ogni x in cui f è continua esistono finite la derivata destra e sinistra, allora la serie di Fourier di f converge puntualmente alla media dei limiti destro e sinistro di f (in particolare converge ad f nei punti di continuità di f).

Convergenza uniforme delle serie di Fourier: sia f 2π -periodica, f continua a tratti e con derivata continua a tratti. (in realtà basta f continua a tratti e $f' \in L^2([-\pi, \pi])$). Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in ogni intervallo $[a, b]$ in cui f è continua.

Dimostrazione nel caso $f \in C^0([-\pi, \pi])$ e $f' \in L^2([-\pi, \pi])$: dallo studio della convergenza totale della serie di Fourier di f si ricava

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (k|a_k| + k|b_k|) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} + \frac{k^2}{2} (a_k^2 + b_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt < +\infty, \end{aligned}$$

da cui la convergenza uniforme della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$ (e, per periodicità, su tutto \mathbb{R}) ad una funzione periodica $g \in C^0([-\pi, \pi])$. Questa coincide con f , come si può dedurre invocando il teorema di convergenza puntuale, o quello di Fourier di convergenza in media quadratica: si ha infatti

$$\|g - S_n(f)\|_{\ell^2([-\pi, \pi])} \leq \sqrt{2\pi} \|g - S_n(f)\|_{\ell^\infty([-\pi, \pi])} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

da cui

$$\|g - f\|_{\ell^2([-\pi, \pi])} \leq \|g - S_n(f)\|_{\ell^2([-\pi, \pi])} + \|S_n(f) - f\|_{\ell^2([-\pi, \pi])} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Dalla condizione $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - f(t)|^2 dt = 0$ si deduce, per la continuità di $|g(t) - f(t)|$, che $|g(t) - f(t)| = 0$ per ogni $t \in [-\pi, \pi]$, ossia $g = f$.

Esempi di approssimazione di funzioni mediante polinomi trigonometrici. Sviluppi di Fourier per funzioni L -periodiche: si considera come base ortogonale quella formata da $\cos(\frac{2\pi}{L}kt)$, $\sin(\frac{2\pi}{L}kt)$.

Lezione del 23/10/13 (2 ore). Funzioni vettoriali di una variabile reale (curve in \mathbb{R}^n): limiti, continuità e derivazione per componenti, interpretazione geometrica della derivata come vettore tangente alla curva immagine. Interpretazione fisica come vettore velocità associato alla legge oraria di un punto materiale. Equazione parametrica della retta tangente alla curva immagine: una parametrizzazione canonica è data dallo sviluppo di Taylor di f arrestato al primo ordine. Velocità scalare. Integrale $\int_a^b \gamma(t) dt$ di una funzione vettoriale $\gamma(t)$ (equivale ad integrare $\gamma(t)$ per componenti), stima $|\int_a^b \gamma(t) dt| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$.

Per dimostrare la stima usiamo una caratterizzazione della norma di un vettore in uno spazio euclideo come $|v| = \max_{|\alpha| \leq 1} \langle v, \alpha \rangle$. Infatti per Cauchy-Schwarz si ha sempre la disuguaglianza $\langle v, \alpha \rangle \leq |v| \cdot |\alpha| \leq |v|$, ossia $\max_{|\alpha| \leq 1} \langle v, \alpha \rangle \leq |v|$, ed inoltre $\langle v, \alpha \rangle = |v|$ per $\alpha = |v|^{-1}v$.

Sia dunque $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tale che $|\int_a^b \gamma(t) dt| = \langle \int_a^b \gamma(t) dt, \alpha \rangle$ e si osservi che $|\alpha| = 1$. Per linearità dell'integrale e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha $\langle \int_a^b \gamma(t) dt, \alpha \rangle = \int_a^b \langle \gamma(t), \alpha \rangle dt \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$, ovvero la tesi. \square

Funzioni di più variabili reali. Domini (si considerano domini D che siano insiemi aperti, o contenuti nella chiusura di insiemi aperti). Insiemi di livello, sottolivello, sopralivello. Funzioni continue. Gli insiemi di livello di una funzione continua sono chiusi nel dominio della funzione, i sopralivelli e i sottolivelli sono aperti. Grafico Γ_f di una funzione di più variabili $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: $\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in D, x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$.

lezione del 28/10/13 (2 ore). Insiemi compatti per successioni. Teorema di Weierstrass: una funzione continua su un insieme compatto per successioni di \mathbb{R}^n (in generale, su uno spazio metrico compatto per successioni) ammette massimo e minimo. Dimostrazione (non visto a lezione): sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con D compatto per successioni. Data una successione massimizzante $\{p_n\} \subset D$ (ossia $f(p_n) \rightarrow \sup_D f$) esiste

una sottosuccessione $p_{n_k} \rightarrow \bar{p} \in D$, da cui $f(p_{n_k}) \rightarrow f(\bar{p})$ per continuità di f . D'altra parte, si ha anche $f(p_{n_k}) \rightarrow \sup_D f$, da cui la tesi.

Nel caso in cui si sia interessati all'esistenza del minimo di una funzione su un dominio, basta che il dominio sia compatto per successioni e questa sia *semicontinua inferiormente*, ovvero $\forall x_n \rightarrow x$ si abbia $f(x) \leq \liminf f(x_n)$.

Definizione: dato X spazio metrico, $A \subset X$ si dice limitato se $A \subset B(x_0, r)$ per un certo $x_0 \in X$ ed $r > 0$. L'insieme A si dice totalmente limitato se $\forall \epsilon > 0$ esiste una ϵ -rete di A , ovvero $\exists x_1, \dots, x_N \in X$ (con N dipendente da ϵ) tale che $A \subset \cup_j B(x_j, \epsilon)$.

Caratterizzazione degli insiemi compatti per successioni: in \mathbb{R}^n , un insieme è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato; in generale, uno spazio metrico (X, d) è compatto per successioni se e solo se è completo e totalmente limitato.

Derivabilità per funzioni di più variabili. Derivata direzionale di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in $p_0 \in \Omega$: data una direzione $e \in \mathbb{R}^2$ (ossia $e = (a, b)$ con $a^2 + b^2 = 1$), la retta passante per $p_0 = (x_0, y_0)$ avente direzione e è data da $t \mapsto r(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb)$, e la derivata nella direzione e di f in p_0 è definita da $D_e f(p_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(r(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + ta, y_0 + tb)$. Se $e = (1, 0)$ (risp. $e = (0, 1)$) si pone $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (risp. $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$), e tale derivata si chiama derivata parziale rispetto a x (risp. rispetto a y). Esempi di calcolo di derivate parziali.

Interpretazione geometrica delle derivate direzionali: sia $\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \Omega\}$ il grafico di f . La mappa $t \mapsto (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb))$ ha come immagine la curva costituita dalla restrizione del grafico di f alla retta $r(t)$ di cui sopra, passante per $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ per $t = 0$. Il vettore

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb)) = (a, b, D_e f(x_0, y_0)),$$

applicato nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, è dunque un vettore tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, la cui componente orizzontale è la direzione $e = (a, b)$, e la cui componente verticale è la derivata direzionale di f nella direzione e in p_0 .

Sussistono esempi di una funzioni che ammettono derivate parziali ma non è continua. Esistono esempi di funzioni f che ammettono tutte le derivate direzionali in un certo punto p_0 , ma non sono continue in p_0 .

Lezione del 30/10/13 (1 ora).

Funzioni differenziabili. Differenziale $df(p_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in un punto $p_0 \in \Omega$. Si tratta di un'applicazione lineare che verifica

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \frac{|f(p) - f(p_0) - df(p_0) \cdot (p - p_0)|}{|p - p_0|} = 0.$$

In altre parole, per una funzione differenziabile in p_0 vale lo sviluppo di Taylor al primo ordine

$$f(p) = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0) + o(|p - p_0|).$$

Se f è differenziabile in p_0 allora esistono le derivate direzionali di f in p_0 e si ha $D_e f(p_0) = df(p_0) \cdot e$ per ogni direzione $e \in \mathbb{R}^n$.

Se f è differenziabile in p_0 , l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f in $(p_0, f(p_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è data da $x_{n+1} = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0)$, ovvero

$$x_{n+1} = f(p_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0), \quad \text{dove } p = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{e } p_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}).$$

Detta e_1, \dots, e_n, e_{n+1} la base canonica di \mathbb{R}^{n+1} , il piano tangente al grafico è generato dai vettori $\{e_i + e_{n+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\}_{i=1, \dots, n}$ (a lezione abbiamo visto il caso $n = 2$). Un vettore normale al piano tangente in $(p_0, f(p_0))$ è dato dal vettore $N_{p_0} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Il differenziale $df(p_0)$ si rappresenta mediante il gradiente $\nabla f(p_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)) \in \mathbb{R}^n$, ovvero si ha $df(p_0) \cdot v = \langle \nabla f(p_0), v \rangle$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Il gradiente individua la direzione di massima crescita di f in p_0 , ossia

$$\max_{|e|=1} D_e f(p_0) = \max_{|e|=1} \langle \nabla f(p_0), e \rangle = |\nabla f(p_0)|, \quad \text{per } e = \frac{\nabla f(p_0)}{|\nabla f(p_0)|}.$$

Lezione del 4/11/13 (2 ore) Lo schema di flusso gradiente per la determinazione di massimi locali di una funzione: dato $p_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \nabla f(p) \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

ovvero il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ x_i(0) = x_{0,i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Detto $\bar{p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$, se $\bar{p} \in \Omega$ allora $\nabla f(\bar{p}) = 0$, ossia \bar{p} è un punto critico, che, per una scelta generica del dato iniziale p_0 risulta essere di massimo locale. L'analogo schema $\frac{dp}{dt} = -\nabla f(p)$ per trovare i minimi locali anche detto schema di discesa gradiente.

Continuità di una funzione differenziabile. Condizioni sufficienti per la differenziabilità, teorema del differenziale totale: se in un intorno $B(p_0, r)$ esistono le derivate parziali di f e sono continue in p_0 , allora f è differenziabile in p_0 . Dimostrazione del teorema del differenziale totale. Funzioni di classe C^1 .

Differenziale di funzioni vettoriali. Se $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p_0 \in \Omega$ e $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha la rappresentazione mediante la matrice Jacobiana

$Df(p_0) \equiv \frac{\partial\{f_1, \dots, f_m\}}{\partial\{x_1, \dots, x_n\}}(p_0)$:

$$df(p_0) \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Regola della catena per il differenziale composto: se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ sono funzioni differenziabili rispettivamente in $p_0 \in \Omega$ e $q_0 = f(p_0) \in U$, allora $h = g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile in p_0 e vale $dh(p_0) = d(g \circ f)(p_0) = dg(f(p_0)) \cdot df(p_0)$. In termini delle matrici Jacobiane,

$$\left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0) \right] = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0)) \right] \cdot \left[\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0) \right], \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0) = \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0).$$

Applicazione: ortogonalità del gradiente rispetto agli insiemi di livello. Data una funzione $f \in C^1(D; \mathbb{R})$, e dato l'insieme di livello $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, se $p_0 \in f^{-1}(c)$ e $\nabla f(p_0) \neq 0$, quest'ultimo vettore risulta ortogonale a $f^{-1}(c)$ in p_0 . Dimostrazione (caso $n = 2$): supponendo che intorno a p_0 l'insieme di livello si possa descrivere mediante una curva parametrica $p(t) = (x(t), y(t))$ di classe C^1 , detta $g(t) = f((x(t), y(t)))$ la funzione composta, si ha, applicando la regola della catena:

$$0 = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \langle \nabla f, \frac{dp}{dt} \rangle,$$

ovvero la condizione di ortogonalità.

Nota: l'ipotesi che l'insieme di livello sia parametrizzabile intorno a p_0 è sempre soddisfatta nel caso $\nabla f(p_0) \neq 0$, in virtù del Teorema delle funzioni implicite.

Esempi di implementazione della regola della catena (con vari abusi di notazione): data $f = f(x, y, z)$ e $z = z(x, y)$ si vuole calcolare il tasso di variazione $\frac{\partial f}{\partial x}$ (NB: abuso di notazione!) della funzione composta $g(x, y) := f(x, y, w(x, y))$ al variare di x mantenendo y fissata. Dato che variando x varia anche z , si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\equiv \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{y,z} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x},$$

dove per $\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{y,z}$ si intende la derivata parziale di f rispetto al primo argomento (in questo caso x) mantenendo costanti i rimanenti due (in questo caso y e z).

Data la quantità scalare $T = T(x, y, z, t)$ (ad es. la temperatura misurata nel punto $p = (x, y, z)$ all'istante t) e la legge oraria $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$ di un punto materiale, si vuole calcolare il tasso di variazione $\frac{dT}{dt}$ (NB: abuso di notazione!) della quantità T (al variare di t) misurata da un termometro solidale con il punto materiale $p(t)$, ovvero, detta $\tau(t) = T(x(t), y(t), z(t), t)$ la temperatura misurata dal termometro nel punto $p(t)$, si vuole calcolare $\frac{d\tau}{dt}$: si ha quindi

$$\frac{dT}{dt} \left(\equiv \frac{d\tau}{dt} \right) = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Lezione del 6/11/13 (1 ora). Esempi di funzioni vettoriali: campi vettoriali, trasformazioni di coordinate, superfici parametriche. Trasformazioni di coordinate: matrice Jacobiana $\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}}$ della trasformazione in coordinate polari. Coordinate cilindriche (r, θ, z) e sferiche (r, θ, ϕ) per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e rispettive matrici Jacobiane.

Esempi di campi vettoriali: gradienti di funzioni scalari. Espressione del campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine: detto $U(p) = K/|p|$ il potenziale gravitazionale, si ha $\vec{F}(p) = \nabla U(p) = -Kp/|p|^3 = -Kr^{-2}\hat{i}_r$, dove $r = |p|$, $\hat{i}_r = p/|p|$ e $K > 0$ una costante opportuna.

lezione dell' 8/11/13 (3 ore). Superfici parametriche e cartesiane, vettori tangenti, vettore normale. Data la parametrizzazione, di classe C^1 , $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, con $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, i vettori colonna della matrice Jacobiana $D\vec{r}(p_0)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(p_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p_0) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(p_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(p_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(p_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(p_0) \end{bmatrix}$$

sono vettori tangenti alla superficie $S = \{\vec{r}(u, v), (u, v) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$ nel punto $\vec{r}(p_0) \in S$, e ne generano il piano tangente qualora siano linearmente indipendenti. Vettore normale ad una superficie, nozione di orientazione. Un vettore $N(p_0)$ normale alla superficie in $\vec{r}(p_0) \in S$ si ottiene, in modo canonico, mediante il prodotto vettoriale $N = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. La norma di N corrisponde all'area del parallelogramma individuato da $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ (si veda sotto una giustificazione piú generale di questo fatto).

Derivate parziali di ordine superiore. Matrice Hessiana delle derivate parziali seconde. Teorema di Schwarz: se $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ (ovvero esistono le derivate parziali seconde e sono continue in D) allora la matrice Hessiana $D^2 f(p) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)]$ è simmetrica per ogni $p \in D$. Derivate successive.

Sviluppo di Taylor al secondo ordine per $f \in C^2(D; \mathbb{R})$ in $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$: sia $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \equiv p(t) = p_0 + tv \in D$ per $0 \leq t \leq t_0$. Posto $g(t) = f(p(t))$, si ha

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p(t))v_i = \langle \nabla f(p), v \rangle, \quad g''(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p(t))v_j v_i = \langle D^2 f(p) \cdot v, v \rangle.$$

Dallo sviluppo di Taylor $g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + o(t^2)$ si ottiene

$$f(p) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), (p - p_0) \rangle + o(|p - p_0|^2).$$

Studio della natura dei punti critici di $f \in C^2(D, \mathbb{R})$: se p_0 è un punto critico di f (ossia $\nabla f(p_0) = 0$), allora lo sviluppo di Taylor al secondo ordine si riduce a

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), (p - p_0) \rangle + o(|p - p_0|^2).$$

Sia $R \in O(n)$ tale che $R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori di $D^2 f(p_0)$, e sia $p - p_0 = R \cdot w$, con $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Si ha

$$\begin{aligned} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), (p - p_0) \rangle &= \langle D^2 f(p_0) \cdot R \cdot w, R \cdot w \rangle = \langle R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R \cdot w, w \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i^2. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque, tenendo conto che $|w|^2 = |Rw|^2 = |p - p_0|^2$,

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i^2 + o(|w|^2),$$

da cui si deduce che se gli autovalori di $D^2 f(p_0)$ sono tutti positivi (risp. negativi) allora p_0 è un punto di minimo (risp. massimo) locale per f . gli insiemi di livello attorno a p_0 sono ellissoidali ed il gradiente è uscente (risp. entrante) da p_0 . Se vi sono autovalori di segno discorde, p_0 è detto un punto di sella. Se qualche autovalore di $D^2 f(p_0)$ risulta nullo (e gli altri non sono di segno discorde), allora il solo sviluppo di Taylor al secondo ordine non permette di decidere a priori sulla natura del punto critico.

Alcune regole per la determinazione dei segni degli autovalori della matrice Hessiana: nel caso $n = 2$ si studia il segno di traccia e determinante. Più in generale ci si può avvalere della regola dei segni di Cartesio per le radici del polinomio caratteristico: se tutti i segni dei coefficienti sono concordi allora non vi sono radici positive, mentre se tutti i coefficienti sono a segno alterno non vi possono essere radici negative.

Una regola pratica equivalente alla regola dei segni di Cartesio consiste nel calcolare, per $k = 1, \dots, n$, i segni dei determinanti dei minori $A_k = [a_{ij}]$, con $1 \leq i, j \leq k$ e $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$. Se questi hanno tutti lo stesso segno allora gli autovalori sono tutti negativi, se hanno segno alterno gli autovalori sono tutti positivi.

Espressione del volume n -dimensionale $\text{vol}_n(P_n)$ del parallelepipedo n -dimensionale $P_n \subset \mathbb{R}^n$ generato da n vettori linearmente indipendenti $v_j = (v_{1,j}, \dots, v_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$, per $j = 1, \dots, n$. Detta $A = [v_{i,j}]$ la matrice $n \times n$ le cui colonne sono date dai vettori v_j , si ha $\text{vol}_n(P_n) = |\det A|$.

Infatti, detto P_{n-1} il parallelepipedo $(n-1)$ -dimensionale generato da v_1, \dots, v_{n-1} , sia $R \in SO(n)$ tale che per $w_j = Rv_j$, $i = 1, \dots, n-1$ si abbia $w_{i,n} = 0$ (ovvero i vettori w_i giacciono nel sottospazio $(n-1)$ -dimensionale ortogonale al versore e_n). Detta $B = [w_{i,j}]$ $i, j = 1, \dots, n-1$ si ha, per ipotesi induttiva, $\text{vol}_{n-1}(R(P_{n-1})) = |\det B|$, da cui

$$\text{vol}_n(P_n) = \text{vol}_n(R(P_n)) = |\det B| \cdot |w_{n,n}| = |\det(RA)| = |\det R \cdot \det A| = |\det A|.$$

Siano ora dati n vettori linearmente indipendenti $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, con $m > n$ e sia P_n il parallelepipedo in \mathbb{R}^m da essi generato. Sia $V = [v_{i,j}]$, con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Proviamo che vale la formula generale $\text{vol}_n(P_n) = \sqrt{\det(V^t V)}$.

Sia infatti $R \in SO(m)$ tale che, per $j = 1, \dots, n$, $\langle Rv_j, e_i \rangle = 0$ per ogni $i > n$ (ovvero i vettori Rv_j giacciono nel sottospazio n -dimensionale di \mathbb{R}^m generato da e_1, \dots, e_n). Per quanto visto prima $\text{vol}_n(P_n) = \text{vol}_n(R(P_n)) = |\det A|$ dove A è il minore di $R \cdot V$ formato dalle prime n righe. Dato che le rimanenti righe di $R \cdot V$ sono identicamente nulle, si ha in particolare $A^t A = (RV)^t RV = V^t (R^t R) V = V^t V$. Essendo $\det(V^t V) = \det(A^t A) = \det A^t \cdot \det A = (\det A)^2$, si ottiene la formula cercata. \square

Si può inoltre verificare che vale

$$\text{vol}_n(P_n) = \sqrt{\det(V^t V)} = \left(\sum_{k=1}^{\ell} (\det A_k)^2 \right)^{1/2},$$

dove $\ell = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ e gli A_k sono i minori $n \times n$ di V .

Nel caso $n = 2$, $m = 3$, V la matrice le cui colonne sono date da $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, si ottiene in particolare la formula

$$\sqrt{V^t V} = \|v_1 \times v_2\|,$$

ossia l'area del parallelogramma generato da due vettori corrisponde alla norma del loro prodotto esterno.

Lezione dell'11/11/13 (2 ore). Massimi e minimi di funzioni su domini $D \subset \mathbb{R}^n$ chiusi e limitati: vanno ricercati tra i punti critici interni a D e tra i massimi e minimi vincolati alla frontiera (o bordo) ∂D , detto anche *vincolo*. Espressione del vincolo in forma parametrica. Risoluzione di problemi di massimo e minimo vincolato quando il vincolo è espresso in forma parametrica. Espressione del vincolo in forma implicita (ovvero come insieme di livello di una funzione data).

Introduzione al metodo dei moltiplicatori di Lagrange: nei punti di massimo o minimo vincolato l'insieme di livello della funzione da ottimizzare è tangente al vincolo, e quindi il suo gradiente risulta essere parallelo (ovvero proporzionale) al gradiente della funzione attraverso cui si esprime il vincolo.

Un esempio di programmazione lineare in tre variabili (cfr. *metodo del semplice*): sia da massimizzare (minimizzare) la funzione $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 a_i x_i + b$ sotto le condizioni $r_k(x_1, x_2, x_3) \leq 0$, con $r_k(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 c_{ik} x_i + d_k$, per $k = 1, \dots, N$. Il vincolo imposto ad f rappresenta l'intersezione di N semispazi, ovvero un insieme *convesso* (ossia, per ogni coppia di punti dell'insieme, il segmento che li unisce è interamente contenuto nell'insieme) a frontiera *poliedrale*. Non essendoci punti critici interni poichè $\nabla f = (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$, il massimo ed il minimo sono assunti alla frontiera poliedrale, ed in generale nei vertici del poliedro: infatti, per dati generici si ha che i vettori (c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}) , che rappresentano le normali alle facce del poliedro, non saranno paralleli a $(a_1, a_2, a_3) = \nabla f$, e quindi la funzione ristretta ad ogni faccia assumerà necessariamente massimo e minimo sugli spigoli. D'altra parte, ∇f non sarà (in generale) ortogonale agli spigoli, per cui il massimo e minimo della funzione ristretta a ciascun spigolo verrà assunto nei vertici.

Lezione del 13/11/13 (2 ore). Teorema dei moltiplicatori di Lagrange: sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f, g \in C^1(A; \mathbb{R})$ e $P_0 \in A$ un estremo di f vincolato a $\Gamma = g^{-1}(0)$. Se $\nabla g(P_0) \neq 0$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (detto *moltiplicatore di Lagrange*) tale che $\nabla f(P_0) = \lambda \cdot \nabla g(P_0)$. Equivalentemente, la coppia $(P_0, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ è punto critico (NB: non più vincolato!!) della funzione (detta *Lagrangiana*) $\psi : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\psi(Q, \mu) = f(Q) - \mu \cdot g(Q)$.

La dimostrazione si basa sul Teorema del Dini delle Funzioni Implicite: dato che $\nabla g(P_0) \neq 0$, non è limitativo supporre (a meno di una permutazione di coordinate) $\frac{\partial g}{\partial x_n}(P_0) \neq 0$. Per il Teorema delle funzioni implicite esiste un intorno B di P_0 tale che il vincolo ristretto a B si può esprimere come grafico di una funzione $h : R \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(R)$, ossia $\Gamma \cap B = \{(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_{n-1}) \in R, x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})\}$. Si osservi che il piano tangente a $\Gamma \cap B$ in un punto $Q = (x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$ è generato dai vettori $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = e_i + \frac{\partial h}{\partial x_i} e_n$, per $i = 1, \dots, n-1$, che sono ortogonali al vettore normale $\nabla g(Q)$.

Inoltre, in $P_0 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}))$ la funzione composta $m(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$ ammette un punto critico, pertanto in P_0 si ha $\frac{\partial m}{\partial x_i} = \langle \nabla f, e_i + \frac{\partial h}{\partial x_i} e_n \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$, ossia $\nabla f(P_0)$ è ortogonale al piano tangente a Γ in P_0 , e dunque risulta necessariamente parallelo a $\nabla g(P_0)$. □

Caratterizzazione dei massimi e minimi vincolati di una forma quadratica sulla sfera unitaria di \mathbb{R}^n . Per $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, B matrice simmetrica $n \times n$, ossia $B = B^t$, sia data la forma quadratica

$$Q(p) = p^t \cdot B \cdot p = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j.$$

Si osservi innanzitutto che $Q(\lambda p) = \lambda^2 Q(p)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (ovvero Q è una funzione omogenea di grado 2). Calcoliamone il gradiente: si ha

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k}(p) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i x_j) = \sum_{\ell=1}^n (a_{k\ell} + a_{\ell k}) x_\ell,$$

da cui si deduce $\nabla Q(p) = (B + B^t) \cdot p = 2B \cdot p$, essendo $B + B^t = 2B$. In particolare $\nabla Q(p) = 0$ se e solo se $p \in \ker B$.

Consideriamo dunque il problema di massimo (risp. minimo) vincolato

$$\max_{|p|=1} Q(p), \quad \min_{|p|=1} Q(p).$$

Il vincolo può essere espresso dall'equazione $g(p) = 0$, con $g(p) = |p|^2 - 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$. Impostando il problema con i moltiplicatori di Lagrange, siamo condotti a risolvere il sistema

$$\nabla Q(p) = \lambda \cdot \nabla g(p), \quad g(p) = 0,$$

ovvero, dato che $\frac{\partial g}{\partial x_k}(p) = 2x_k$,

$$2B \cdot p = 2\lambda p, \quad |p|^2 = 1.$$

Pertanto i punti di estremo vincolato (tra cui il massimo ed il minimo) sono gli autovettori unitari di B . Osservando che, se p è un autovettore unitario, vale

$$Q(p) = p^t \cdot B \cdot p = p^t \cdot (\lambda \cdot p) = \lambda \langle p, p \rangle = \lambda,$$

si ha che i valori estremi corrispondono agli autovalori di B . In particolare il massimo ed il minimo autovalore realizzano rispettivamente il massimo ed il minimo di Q sull'insieme $\{|p| = 1\}$.

Utilizzando questa caratterizzazione di autovettori unitari e autovalori di una matrice simmetrica si può dimostrare ad esempio il teorema spettrale per matrici simmetriche, ovvero la loro diagonalizzabilità, costruendo induttivamente una base ortonormale di autovettori.

Norma operatoriale di una matrice. Sia A una matrice $n \times n$, si vuole caratterizzare la più piccola costante $\|A\|$ (detta norma operatoriale di A) che verifica $|Ap| \leq \|A\| \cdot |p|$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$. Si avrà in particolare, posto $w = \frac{p}{|p|}$, $|Aw| \leq \|A\|$ per ogni $w \in \mathbb{R}^n$, $|w| = 1$. In particolare, detto $C = \sup\{|Aw|, |w| = 1\}$ (tale sup è in realtà un max dato che la sfera unitaria è un insieme chiuso e limitato), si ha $C \leq \|A\|$ ma anche $|Ap| \leq C|p|$ per ogni $p \neq 0$, ossia, per minimalità di $\|A\|$, $C \geq \|A\|$. Pertanto si conclude che $\|A\| = \sup_{\{|p|=1\}} |Ap|$, ossia la norma operatoriale misura la massima elongazione possibile di un vettore unitario sotto l'azione della matrice A . Inoltre, si verifica immediatamente che tale norma è compatibile con il prodotto di matrici, ossia $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Si ha infine

$$\|A\|^2 = \sup_{\{|p|=1\}} |Ap|^2 = \sup_{\{|p|=1\}} \langle A^t Ap, p \rangle,$$

da cui si deduce, per quanto visto prima, che $\|A\| = \sqrt{\mu}$, con $\mu > 0$ il massimo autovalore della matrice (definita positiva) $B = A^t A$.

Lezione del 15/11/13 (2 ore). Teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di k vincoli: sia $G = (G_1, \dots, G_k) : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 , e sia $f \in C^1(A; \mathbb{R})$. Se $p_0 \in G^{-1}(0)$ è un estremo vincolato per f ristretta a $G^{-1}(0)$ e se $DG(p_0)$ ha rango massimo k , allora $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(p_0) = \lambda_1 \nabla G_1(p_0) + \dots + \lambda_k \nabla G_k(p_0)$. La dimostrazione è conseguenza del Teorema delle Funzioni implicite e della regola di derivazione delle funzioni composte.

Programmazione non lineare: dato $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+k}$, se si deve ottimizzare $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ ristretta ai vincoli $G_1(p) \leq 0, \dots, G_k(p) \leq 0$, dove $p = (x_1, \dots, x_{n+k}) \in \Omega$ e $G_1, \dots, G_k \in C^1$, l'estremo vincolato $p_0 = (x_1^0, \dots, x_{n+k}^0) \in \Omega$ risulta essere, sotto certe ipotesi sui vincoli, un punto critico (libero) della funzione (lagrangiana) ausiliaria

$$\Psi(x_1, \dots, x_{n+k}, \lambda_1, \dots, \lambda_k, u_1, \dots, u_k) = f(p) - \sum_{i=1}^k \lambda_i (G_i(x_1, \dots, x_{n+k}) + u_i^2).$$

Il sistema corrispondente $\nabla\Psi = 0$ è detto sistema delle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial G_i(p_0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+k}}(p_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial G_i(p_0)}{\partial x_{n+k}} \\ G_1(p_0) = -u_1^2 \\ \vdots \\ G_k(p_0) = -u_k^2 \\ \lambda_1 u_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_k u_k = 0. \end{array} \right.$$

Le ipotesi cui devono soddisfare i vincoli discendono dal Teorema delle funzioni implicite.

Il teorema del Dini delle funzioni implicite. Enunciato nel caso di due variabili: se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $C^1(\Omega)$, $p_0 \equiv (x_0, y_0) \in g^{-1}(0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$, allora esistono $\delta, \sigma > 0$, ed un intorno $R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ tale che $g^{-1}(0) \cap R = \{(x, y) \in R, y = \phi(x)\}$, dove $\phi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 . Si ha inoltre la formula

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \phi(x))}.$$

Il teorema del Dini dà delle condizioni sufficienti affinché l'insieme di livello $g^{-1}(0)$ possa rappresentarsi, localmente, come grafico di una opportuna funzione $y = \phi(x)$, la quale risulta definita implicitamente dall'equazione $g(x, y) = 0$, e le cui derivate possono essere calcolate derivando implicitamente rispetto a x la relazione $g(x, \phi(x)) = 0$. In particolare ϕ può essere calcolata approssimandola mediante sviluppi di Taylor.

Dimostrazione del teorema delle funzioni implicite nel caso di due variabili. Supponendo $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$, esiste $\sigma > 0$ tale che $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) > 0$ per $x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma$ e $y_0 - \sigma \leq y \leq y_0 + \sigma$. Possiamo anche supporre senza perdita di generalità che

$$\min \left\{ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y), x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma, y_0 - \sigma \leq y \leq y_0 + \sigma \right\} = \ell > 0.$$

In particolare, la funzione $t \mapsto G(x_0, t)$ è strettamente crescente per $y_0 - \sigma \leq t \leq y_0 + \sigma$, e dunque vale $G(x_0, y_0 - \sigma) < 0$ e $G(x_0, y_0 + \sigma) > 0$. Per la continuità di G esiste $0 < \delta < \sigma$ tale che $G(x, y_0 - \sigma) < 0$ e $G(x, y_0 + \sigma) > 0$ per ogni $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$. Per ogni $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$, la stretta monotonia della funzione $t \mapsto G(x, t)$ implica che esiste un unico punto $y \equiv \phi(x) \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ tale che $G(x, y) = G(x, \phi(x)) = 0$. Verifichiamo che la funzione implicita ϕ sia di classe C^1 : siano x e $x+h$ in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, consideriamo

la restrizione di G al segmento di estremi $p = (x, \phi(x))$ e $q = (x + h, \phi(x + h))$, ovvero la funzione

$$f(t) = G(p + t(q - p)) = G(x + th, \phi(x) + t[\phi(x + h) - \phi(x)]), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Per il teorema di Lagrange del valor medio, si ha, per un certo $0 < \tau < 1$,

$$f(1) - f(0) = f'(\tau) = \frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau) \cdot h + \frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau) \cdot [\phi(x + h) - \phi(x)],$$

dove $p_\tau = p + \tau(q - p)$. Essendo $f(1) - f(0) = 0$, si ottiene in particolare

$$\phi(x + h) - \phi(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)} h.$$

Dalla relazione precedente si ricava, dato che $p_\tau \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$,

$$|\phi(x + h) - \phi(x)| \leq h \frac{M}{\ell},$$

dove

$$M = \max \left\{ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y), x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, y_0 - \sigma \leq y \leq y_0 + \sigma \right\}.$$

Facendo tendere h a zero, si ottiene così la continuità di ϕ per ogni $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$.

Ora, stabilito che ϕ è continua, si può dedurre che per $h \rightarrow 0$ il punto $p_\tau = (x + \tau h, \phi(x) + \tau[\phi(x + h) - \phi(x)])$ tende effettivamente a $p = (x, \phi(x))$, da cui, passando al limite per $h \rightarrow 0$ nella relazione

$$\frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)},$$

si ottiene che ϕ è derivabile e vale la formula

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \phi(x))}.$$

D'altra parte, il secondo membro della precedente relazione è costituito dalla composizione di funzioni continue, pertanto è continuo. Si deduce pertanto che ϕ è in realtà di classe C^1 . \square

Lezione del 18/11/13 (2 ore). Il teorema del Dini delle funzioni implicite (caso generale): sia $G : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione di classe C^1 nelle variabili $(x, y) \equiv (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$, e sia $(x_0, y_0) \in A$ tale che $G(x_0, y_0) = 0$ e $\det \frac{\partial \{G_1, \dots, G_k\}}{\partial \{y_1, \dots, y_k\}} \neq 0$. Allora $\exists \delta, \sigma > 0$, ed esiste $\phi : B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B_\sigma(y_0) \subset \mathbb{R}^k$ tali che $G^{-1}(0) \cap (B_\delta(x_0) \times B_\sigma(y_0)) = \{(x, y) : x \in B_\delta(x_0), y = \phi(x)\}$. Inoltre, ϕ è di classe C^1 e vale

$$D\phi(x) = - \left[\frac{\partial \{G_1, \dots, G_k\}}{\partial \{y_1, \dots, y_k\}} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial \{G_1, \dots, G_k\}}{\partial \{x_1, \dots, x_n\}} \right] \Big|_{y=\phi(x)},$$

ovvero vale la formula di derivazione implicita

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (G_i(x, \phi(x))) = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x, \phi(x)) + \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial G_i}{\partial y_\ell}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi_\ell}{\partial x_j}(x).$$

Nel caso G sia lineare, il teorema delle funzioni implicite si riduce al teorema di Rouché-Capelli.

Alcune applicazioni del teorema delle funzioni implicite: descrizione delle soluzioni di sistemi di equazioni non lineari, esistenza e unicità per equazioni differenziali esatte, teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di k vincoli.

Teorema della funzione inversa: se $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e se $\det Dg(p_0) \neq 0$ (ovvero $\exists [Dg(p_0)]^{-1}$), allora $\exists U \subset D$ intorno di p_0 e $V \subset \mathbb{R}^n$ intorno di $q_0 = g(p_0)$ tale che $g|_U : U \rightarrow V$ è invertibile. Inoltre, l'inversa $g|_U^{-1}$ è di classe C^1 (si dice che g è un diffeomorfismo locale), e $[D(g|_U)^{-1}(q_0)] = [Dg(p_0)]^{-1}$.

Tale risultato dà condizioni sufficienti per la risolubilità di sistemi non lineari di n equazioni in n incognite.

Esempio: la trasformazione in coordinate polari $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ verifica $\det \frac{\partial \{x,y\}}{\partial \{r,\theta\}} = r \neq 0 \forall r > 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$. Tale trasformazione è dunque un diffeomorfismo locale. Si osservi che la trasformazione non è globalmente invertibile, in quanto (r, θ) ed $(r, \theta + 2k\pi)$ hanno la stessa immagine $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Lezione del 20/11/13 (2 ore) Formula degli accrescimenti finiti: si tratta di una versione del teorema del valor medio per funzioni vettoriali. Data $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 e $p_1, p_2 \in D$ tali che il segmento $[p_1, p_2] = \{p_1 + t(p_2 - p_1), 0 \leq t \leq 1\} \subset D$, si ha

$$|f(p_2) - f(p_1)| \leq \left(\sup_{[p_1, p_2]} \|Df\| \right) \cdot |p_2 - p_1|,$$

dove $\|\cdot\|$ è ad esempio la norma operatoriale. Infatti, per il teorema fondamentale del calcolo applicato a $t \mapsto f(p_1 + t(p_2 - p_1))$ si ha

$$\begin{aligned} |f(p_2) - f(p_1)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p_1 + t(p_2 - p_1)) dt \right| = \left| \int_0^1 [Df(p_1 + t(p_2 - p_1))] \cdot (p_2 - p_1) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \|Df(p_1 + t(p_2 - p_1))\| \cdot |p_2 - p_1| dt \\ &\leq \int_0^1 \sup_{[p_1, p_2]} \|Df\| \cdot |p_2 - p_1| dt \\ &= \sup_{[p_1, p_2]} \|Df\| \cdot |p_2 - p_1|. \end{aligned}$$

Cenni di dimostrazione del Teorema della funzione inversa: sia $q \in B_s(q_0)$, e si consideri lo schema di tipo Newton per sistemi non lineari (in realtà corrisponde al metodo delle secanti) $p_{n+1} = f(p_n)$, con

$$f(p) = p + [Dg(p_0)]^{-1}(q - g(p)).$$

Si ha $p = f(p)$, ossia p è punto fisso di f , se e solo se $q = g(p)$. In altre parole, se il punto fisso p esiste ed è unico, allora $p = g^{-1}(q)$ è l'unica immagine inversa di q secondo g , ossia g è invertibile.

Dimostriamo che f è una contrazione se p è sufficientemente vicino a p_0 , in modo da garantire esistenza e unicità del punto fisso di f , ovvero l'invertibilità locale di g intorno a p_0 .

Siano $p_1, p_2 \in B_r(p_0)$. Per la formula degli accrescimenti finiti si ha

$$|f(p_2) - f(p_1)| \leq \sup_{B_r(p_0)} \|Df\| \cdot |p_2 - p_1| \quad \forall p_1, p_2 \in B_r(p_0).$$

Ora calcoliamo $Df(p)$ per ogni $p \in B_r(p_0)$, e dimostriamo che si ha $\|Df(p)\| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $p \in B_r(p_0)$ a patto di scegliere r sufficientemente piccolo (in particolare f è una contrazione). Si ha

$$Df(p) = I - [Dg(p_0)]^{-1}[Dg(p)] = [Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)],$$

da cui

$$\|Df(p)\| = \|[Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)]\| \leq \|Dg(p_0)^{-1}\| \cdot \|Dg(p_0) - Dg(p)\|,$$

e dato che g è di classe C^1 si ha che per $p \rightarrow p_0$ vale $\|Dg(p_0) - Dg(p)\| \rightarrow 0$ (continuità di Dg in p_0), da cui discende che $\|Df(p)\|$ può essere reso piccolo a piacere per p sufficientemente vicino a p_0 .

Parte conclusiva della dimostrazione (non vista a lezione): mostriamo ora che per q sufficientemente vicino a q_0 (ovvero per s sufficientemente piccolo) si ha che f è una contrazione di $X = \overline{B(p_0, r)}$ in sè ($X \subset \mathbb{R}^n$ è completo in quanto sottoinsieme chiuso dello spazio metrico completo \mathbb{R}^n), ossia mostriamo che $|p - p_0| \leq r \Rightarrow |f(p) - p_0| \leq r$. In effetti si ha

$$|f(p) - p_0| \leq |f(p) - f(p_0)| + |f(p_0) - p_0| \leq \frac{1}{2}|p - p_0| + \|Dg(p_0)^{-1}\| \cdot |q - q_0| \leq r$$

a patto di scegliere s in modo che $\|Dg(p_0)^{-1}\| \cdot |q - q_0| \leq \|Dg(p_0)^{-1}\| \cdot s \leq r/2$. Fissati dunque in tal modo s ed r , e ponendo $V = B_s(q_0)$ ed $U = g^{-1}(B_s(q_0)) \cap B(p_0, r)$, si ha che $g|_U$, la funzione g ristretta ad U , è invertibile, e si può dimostrare inoltre che la funzione inversa $(g|_U)^{-1}$ è differenziabile, e di classe C^1 , in altre parole $g|_U$ è un diffeomorfismo di U su V . La formula per il differenziale della funzione inversa segue ad esempio derivando la relazione $(g|_U)^{-1} \circ (g|_U) = I$.

Integrali doppi e tripli per funzioni continue definite su un prodotto di intervalli. Teorema di Fubini-Tonelli (formula dell'integrale iterato). Estensione al caso di domini

normali rispetto agli assi coordinati: nel caso degli integrali doppi, se ad esempio $h_1, h_2 \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ e $D = \{(x, y), a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$, ed inoltre $f \in C^0(D; \mathbb{R})$, si ha

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Nel caso degli integrali tripli, se esistono funzioni continue $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ ed $h_1(x)$ e $h_2(x)$ tali che $D = \{(x, y, z), a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq g_2(x, y), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$, ed $f \in C^0(D; \mathbb{R})$, allora si ha

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx.$$

Calcolo di aree e volumi. Per $D \subset \mathbb{R}^2$ si ha $\text{Area}(D) = \iint_D dx dy$. Per $D \subset \mathbb{R}^3$ si ha $\text{Volume}(D) = \iiint_D dx dy dz$.

Lezione del 21/11/13 (1 ora). Momenti primi e secondi di una distribuzione di massa/probabilità. Formula per il baricentro di figure piane o solide. Dato un solido che occupa una regione di spazio $D \subset \mathbb{R}^3$ con densità $\rho(x, y, z)$, le coordinate $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del baricentro sono date dalla media pesata

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz}, \\ \bar{y} &= \frac{\iiint_D y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz}, \\ \bar{z} &= \frac{\iiint_D z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz}. \end{aligned}$$

Momenti d'inerzia (momenti secondi) I_x, I_y rispetto agli assi x ed y di una figura piana D con densità di massa/probabilità $\rho(x, y)$: $I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy$, $I_x = \iint_D y^2 dx dy$. Assieme ai momenti $I_{xy} = \iint_D xy \rho(x, y) dx dy$ concorrono a formare la matrice di covarianza della distribuzione di probabilità $\rho(x, y)$ su D .

Sia $S = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ l' n -simpleso fondamentale in \mathbb{R}^n , si ha la formula $\text{vol}_n(S) = \int_S dx_1 dx_2 \dots dx_n =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 dx_1 \left(\int_0^{1-x_1} dx_2 \left(\int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \left(\dots \left(\int_0^{1-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}} dx_n \right) \dots \right) \right) \right) = \\
 &= \int_0^1 dx_1 \left(\int_0^{1-x_1} dx_2 \left(\int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \left(\dots \left(\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-2} x_i} (1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) dx_{n-1} \right) \dots \right) \right) \right) = \\
 &= \int_0^1 dx_1 \left(\int_0^{1-x_1} dx_2 \left(\int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \left(\dots \left(\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-3} x_i} \frac{1}{2} (1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i)^2 dx_{n-2} \right) \dots \right) \right) \right) = \\
 &= \int_0^1 dx_1 \left(\int_0^{1-x_1} dx_2 \left(\int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \left(\dots \left(\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-4} x_i} \frac{1}{3!} (1 - \sum_{i=1}^{n-3} x_i)^3 dx_{n-3} \right) \dots \right) \right) \right) = \\
 &= \int_0^1 dx_1 \left(\int_0^{1-x_1} \frac{1}{(n-2)!} (1-x_1-x_2)^{n-2} dx_2 \right) = \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!} (1-x_1)^{n-1} dx_1 = \\
 &= \frac{1}{n!}.
 \end{aligned}$$

Lezione del 21/11/13 (1 ora). Formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli: se $T : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow D = T(R) \subset \mathbb{R}^n$, è di classe C^1 ed iniettiva tranne al più sui punti della frontiera ∂R del dominio, allora, per $f \in C^0(D; \mathbb{R})$, posto $x = (x_1, \dots, x_n) = T(u_1, \dots, u_n) = T(u)$, vale la formula

$$\int_D f(x) dx_1 \dots dx_n = \int_R f(T(u)) \left| \det \frac{\partial \{T_1, \dots, T_n\}}{\partial \{u_1, \dots, u_n\}}(u) \right| du_1 \dots du_n.$$

Uno dei passaggi chiave per ottenere la formula è l'espressione del volume del parallelepipedo n -dimensionale $P \subset \mathbb{R}^n$ generato da n vettori $v_j = (v_{1,j}, \dots, v_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$, per $j = 1, \dots, n$. Detta $A = [v_{i,j}]$ la matrice $n \times n$ le cui colonne sono date dai vettori v_j , si ha $\text{vol}(P) = |\det A|$, come dimostrato in precedenza.

Idea della dimostrazione della formula di cambiamento di variabile: data una partizione di R in cubetti n -dimensionali generati dai vettori $\Delta u_1 \cdot e_1, \dots, \Delta u_n \cdot e_n$, questa induce una partizione di D data dalle immagini dei cubetti, il cui volume n -dimensionale è approssimativamente dato dal volume del parallelepipedo generato da $dT(u) \cdot (\Delta u_1 \cdot e_1), \dots, dT(u) \cdot (\Delta u_n \cdot e_n)$, ovvero dai vettori $\Delta u_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial u_1}(u), \dots, \Delta u_n \cdot \frac{\partial T}{\partial u_n}(u)$. Tale volume è dato da $|\det DT(u)| \Delta u_1 \dots \Delta u_n$, e quindi la somma di Riemann di f su D si può esprimere come $\sum f(T(u)) |\det DT(u)| \Delta u_1 \dots \Delta u_n$, che converge al secondo membro della formula di cambiamento di variabili.

Lezione del 22/11/13 (2 ore). Calcolo di integrali multipli utilizzando trasformazioni di coordinate polari, sferiche e cilindriche. Volume della sfera, area dell'ellisse. Teorema

di Pappo-Guldino per il volume dei solidi di rivoluzione. Calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Posto $f(x, y) = e^{-x^2} e^{-y^2}$, si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-y^2} \left[\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right] dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2.$$

D'altra parte, trasformando in coordinate polari, si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta \right] dr = \pi,$$

da cui la formula $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Lezione del 22/11/13 (2 ore). Integrali curvilinei di prima specie. Data una funzione continua $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ed una curva parametrizzata $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ di classe C^1 e iniettiva tranne al più agli estremi (ovvero una curva *semplice*), detto $\Gamma = \{\gamma(t), a \leq t \leq b\}$ il suo sostegno, si definisce l'integrale curvilineo (di prima specie) di f lungo Γ come segue:

$$\int_{\Gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2} dt.$$

Proprietà: indipendenza dalla parametrizzazione, linearità rispetto all'integrando f , additività rispetto alla curva Γ (ossia, se $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$ con $\Gamma_i = \{\gamma_i(t), a_i \leq t \leq b_i\}$, γ_i di classe C^1 e iniettiva, $\gamma_{i-1}(b_{i-1}) = \gamma_i(a_i)$ per ogni i , si ha $\int_{\Gamma} f ds = \sum_i \int_{\Gamma_i} f ds$).

L'integrale curvilineo di prima specie è un integrale non orientato, e si utilizza per il calcolo di lunghezze di curve (caso $f \equiv 1$), masse di oggetti filiformi (se f rappresenta la densità lineare dell'oggetto) o baricentri e/o momenti d'inerzia (rispettivamente nel caso $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$, o f rappresenti la distanza al quadrato da un asse, come ad esempio $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, la distanza al quadrato dall'asse z).

Nel caso Γ sia immagine di una parametrizzazione $\gamma \in C^0([a, b])$ (iniettiva tranne al più agli estremi), si dà la seguente nozione di lunghezza:

$$L(\Gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^N |P_i - P_{i-1}|, P_i = \gamma(t_i), a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \right\}.$$

Se $L(\Gamma) < +\infty$ si dice che la curva è *rettificabile*.

Lezione del 27/11/13 (2 ore). Integrali superficiali di prima specie. Data una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 ed una superficie $S = \{\vec{r}(u, v), (u, v) \in R \subset$

$\mathbb{R}^2\} \subset D$ definita mediante una parametrizzazione di classe C^1 iniettiva tranne al più sul bordo ∂D , si definisce l'integrale superficiale di f su S come segue:

$$\iint_S f da := \iint_R f(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv = \iint_R f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{\det([D\vec{r}]^t \cdot [D\vec{r}])} dudv.$$

Proprietà: invarianza rispetto alla parametrizzazione, linearità, additività. Formula per l'area di superfici cartesiane. Calcolo di masse, baricentri, momenti d'inerzia di figure bidimensionali.

Lezione del 29/11/13 (2 ore). Integrale curvilineo (detto di seconda specie, o orientato) per campi vettoriali su curve orientate: se $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo di vettori continuo e $\Gamma \subset D$ è una curva orientata di primo estremo A e secondo estremo B , parametrizzata mediante $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, con $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$, di classe C^1 iniettiva tranne al più agli estremi, si pone

$$\int_{\Gamma} F \cdot ds \equiv \int_{\Gamma} \langle F, \tau \rangle ds := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

Notazione con le 1-forme differenziali (per semplicità, consideriamo il caso $n = 3$): se $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, si pone

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot ds &\equiv \int_{\Gamma} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz := \\ &= \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t) dt. \end{aligned}$$

L'applicazione $(x, y, z) \mapsto F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$ si dice 1-forma differenziale.

Proprietà dell'integrale curvilineo di seconda specie: indipendenza dalla parametrizzazione (a meno dell'orientazione (indotta dalla parametrizzazione) di Γ), linearità, additività. Dipendenza dall'orientazione di Γ dell'integrale curvilineo: se indichiamo con Γ_{AB} la curva Γ orientata con primo estremo A e secondo estremo B e Γ_{BA} la stessa curva in cui si considera B come primo estremo ed A come secondo estremo, si ha

$$\int_{\Gamma_{BA}} F \cdot ds = - \int_{\Gamma_{AB}} F \cdot ds.$$

Teorema fondamentale del calcolo per gli integrali curvilinei di seconda specie: se F è un campo conservativo, ovvero se $F = \nabla \phi$, cioè F è il gradiente di una funzione (detta *potenziale scalare*) ϕ , si ha

$$\int_{\Gamma_{AB}} \nabla \phi \cdot ds = \int_a^b \langle \nabla \phi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\phi(\gamma(t))) dt = \phi(B) - \phi(A).$$

Nel formalismo delle forme differenziali si ha

$$\int_{\Gamma_{AB}} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_n} dx_n = \int_{\Gamma_{AB}} d\phi = \phi(B) - \phi(A).$$

In particolare, l'integrale curvilineo di un campo conservativo dipende solamente dagli estremi della curva Γ , e dunque non cambia se calcolato lungo una qualsiasi altra curva che congiunga A a B .

Esempi di campi conservativi: il campo elettrostatico/gravitazionale generato da una carica/massa puntiforme posta nell'origine, dato da $\vec{F}(x, y, z) = \pm C \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ è conservativo. Si ha $\vec{F} = \nabla \phi$, con $\phi(x, y, z) = \pm C \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Il campo di una forza di richiamo elastica $F(x, y, z) = -k(x, y, z)$ è conservativo: si ha $F = \nabla \phi$ con $\phi(x, y, z) = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Lezione del 4/12/13 (2 ore). Condizioni equivalenti alla proprietà di essere conservativo su un dominio D per un campo di vettori di classe C^0 : indipendenza (dell'integrale curvilineo) dalla traiettoria, circuitazione nulla. Determinazione di una funzione potenziale per un campo conservativo $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: fissato $p_0 \in D$, si pone $\phi(p) = \int_{\Gamma_{p_0 p}} F \cdot ds$, dove, per $p \in D$, $\Gamma_{p_0 p}$ è una curva orientata che collega p_0 a p . La definizione è consistente, per l'indipendenza dalla traiettoria. Dimostriamo che ad esempio $\frac{\partial \phi}{\partial x}(p) = F_1(p)$, la prima componente di F : detto $S = \{p + te_1, 0 \leq t \leq h\}$ il segmento che unisce p a $p + he_1$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\phi(p + he_1) - \phi(p)}{h} &= \frac{1}{h} \int_S F \cdot ds = \frac{1}{h} \int_0^h \langle F(p + te_1), e_1 \rangle dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h F_1(p + te_1) dt = F_1(p + \bar{t}e_1) \end{aligned}$$

per un certo $0 \leq \bar{t} \leq h$. La conclusione segue passando al limite per $h \rightarrow 0$, stante la continuità di F_1 .

Metodi di calcolo del potenziale di un campo conservativo (in \mathbb{R}^2): dovendo essere, a y fissato, $\phi(x, y) = \int_{x_0}^x F_1(x, y) dx$, posto $G(x, y) = \int F_1(x, y) dx$ (integrale indefinito), si avrà $\phi(x, y) = G(x, y) + C(y)$, e $C(y)$ si ottiene risolvendo l'equazione differenziale $C'(y) = F_2(x, y) - \frac{\partial G(x, y)}{\partial y}$. Il potenziale risulta definito a meno di una costante.

Condizione necessaria affinché un campo F di classe C^1 sia conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^n$ è che la matrice Jacobiana DF sia una matrice simmetrica (infatti, se $F = \nabla \phi$ in A allora $DF = D^2 \phi$, che è simmetrica per il teorema di Schwarz). In dimensione due e tre, tale condizione si traduce nella condizione sulle derivate incrociate

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}.$$

Nozione di insieme *semplicemente connesso* (viene qui data la definizione in \mathbb{R}^2): $A \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso se per ogni $\Gamma \subset A$ curva semplice chiusa, si ha $\Gamma = \partial D$ con $D \subset A$ (Γ è il bordo di un dominio *interamente* contenuto in A).

Esempi di insiemi semplicemente connessi in \mathbb{R}^n : palle, insiemi convessi, insiemi stellati. In \mathbb{R}^2 sono semplicemente connessi gli insiemi connessi privi di “buchi”. Esempi di insiemi non semplicemente connessi nel piano sono le corone circolari, o aperti connessi privati di un numero finito di punti.

La condizione DF simmetrica su un dominio A semplicemente connesso è sufficiente affinché F sia conservativo in A . In particolare, se DF è simmetrica su un dominio A qualunque, dato che ogni palla è semplicemente connessa, si ha che F ammette *localmente* un potenziale (che può non essere globalmente ben definito su A se A non è semplicemente connesso).

Dimostrazione della sufficienza della condizione nel caso di domini stellati nel piano (Lemma di Poincaré, *non svolto a lezione*): sia $D \subset \mathbb{R}^2$ stellato rispetto all'origine, e sia $p = (x, y) \in D$. Definiamo $\phi(x, y) = \int_0^1 xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty) dt$ (lavoro di F lungo il segmento di estremi $(0, 0)$ e (x, y)). Grazie al teorema di derivazione sotto il segno di integrale, valido per integrandi di classe C^1 e la condizione $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)) dt \\ &= \int_0^1 F_1(tx, ty) + tx \frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial F_2}{\partial x}(tx, ty) dt \\ &= \int_0^1 F_1(tx, ty) + tx \frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tF_1(tx, ty)) dt = F_1(x, y). \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y)$. □

Definizione di rotore di un campo vettoriale in \mathbb{R}^3 . Campi irrotazionali. Un campo conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ è irrotazionale in A . Rotore di un campo vettoriale in \mathbb{R}^2 . Esempio: il campo di velocità di rotazione attorno all'asse z è dato da $V = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ dove $\vec{\Omega} = \Omega e_3$ rappresenta la velocità angolare e $\vec{r} = xe_1 + ye_2 = r\hat{r}$ esprime la componente orizzontale di $p = (x, y, z)$. Si ha $V = -\Omega ye_1 + \Omega xe_2 = \Omega r\hat{\theta}$, e $\text{rot } V = 2\vec{\Omega}$.

Esempio fondamentale: il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{r} \hat{\theta}$$

è irrotazionale. Tuttavia non è conservativo su tutto il suo dominio di definizione, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (un insieme non semplicemente connesso), in quanto il suo integrale curvilineo lungo una circonferenza di centro l'origine è diverso da zero. Sul dominio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x \geq 0\}$, che è semplicemente connesso, si ha $F = \nabla \theta$, dove θ è la funzione angolare definita dalla funzione inversa della trasformazione in coordinate polari $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ristretta a $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$.

Formule di Gauss-Green nel piano: sia $F = (F_1, F_2) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 , sia $D \subset A$ un dominio tale che $\Gamma = \partial D$ sia una curva semplice chiusa di classe C^1 a tratti. Allora vale

$$\oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy,$$

dove Γ è orientata in senso antiorario. Applicazioni della formula di Gauss-Green: calcolo di aree di figure piane mediante integrazione sul loro contorno, calcolo di circuitazioni mediante integrali doppi.

Lezione del 6/12/13 (2 ore). Dimostrazione del teorema di Gauss-Green nel caso di domini normali rispetto ad entrambi gli assi coordinati. Estensione per additività a domini piani più generali. Rivisitazione del Teorema di Gauss-Green nel piano alla luce degli integrali orientati: la formula si può scrivere

$$\int_{\partial D} \langle F, \tau \rangle d\ell = \iint_D \langle \text{rot } F, n \rangle da,$$

dove il dominio D giace in un piano orizzontale di \mathbb{R}^3 , è orientato dal versore normale diretto verso l'alto $n = e_3$, ed il bordo ∂D è una curva semplice di classe C^1 a tratti orientata in senso antiorario dal versore τ , ovvero n e τ soddisfano la regola della mano destra, con n facente le veci del pollice.

L'integrale a secondo membro è un un integrale orientato di superficie, ovvero un integrale di *flusso*: se $\text{rot } F$ è il campo di velocità di un fluido avente densità unitaria, serve a misurare la quantità di fluido che passa attraverso D nell'unità di tempo.

In virtù dell'invarianza per isometrie di \mathbb{R}^3 di ambo i membri della formula precedente, quest'ultima si estende per additività al caso D superficie triangolata di \mathbb{R}^3 , per passaggio al limite, al caso delle superfici di classe C^1 . Più precisamente, vale il Teorema di Stokes: sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con bordo ∂S , entrambi orientati da una parametrizzazione data $\vec{r} : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 , rango $D\vec{r}$ massimo e iniettiva sino al bordo ∂R , dove può risultare di classe C^1 a tratti. Allora si ha $\int_{\partial S} \langle F, \tau \rangle d\ell = \iint_S \langle \text{rot } F, n \rangle da$ per ogni campo vettoriale F di classe C^1 definito in un intorno di S .

Integrali superficiali di seconda specie (o integrali di flusso): sia $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, ed $S \subset A$ una superficie parametrizzata da $\vec{r}(u, v)$, di classe C^1 , $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$. Si definisce

$$\iint_S \langle F, n \rangle da := \iint_R \langle F(\vec{r}(u, v)), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \rangle dudv.$$

Proprietà degli integrali orientati di superficie: a parità di orientazione n , indipendenza dalla parametrizzazione \vec{r} (conseguenza della formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi); linearità rispetto ad F , additività rispetto a S .

Notazione degli integrali di flusso con le forme differenziali: se $F = (F_1, F_2, F_3)$ e dx, dy, dz rappresentano i differenziali delle funzioni coordinate $p \equiv (x, y, z) \mapsto x, p \mapsto y, p \mapsto z$, si pone

$$\iint_S \langle F, n \rangle da = \iint_S F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy,$$

dove \wedge definisce un prodotto *anticommutativo* (associativo, distributivo rispetto alla somma) tra forme differenziali con il quale si possono definire elementi d'area orientati: ad esempio $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ identifica un elemento d'area orientato su un piano orizzontale. Volendo leggere la formula precedente attraverso la parametrizzazione $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, dato che

$$dx(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz(u, v) = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

si ha

$$dx(u, v) \wedge dy(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv,$$

e similmente

$$dz(u, v) \wedge dx(u, v) = \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du \wedge dv, \quad dy(u, v) \wedge dz(u, v) = \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du \wedge dv.$$

si ottiene pertanto la formula

$$\iint_S F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy = \iint_R \left[F_1 \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + F_2 \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + F_3 \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du \wedge dv,$$

che è consistente con la definizione di integrale di flusso, dato che vale

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right).$$

Data $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva semplice chiusa orientata, supponiamo $\Gamma = \partial S = \partial S'$ per due superfici S e S' orientate in modo da rispettare la regola della mano destra rispetto all'orientazione di Γ . Allora dal Teorema di Stokes si deduce che per ogni campo vettoriale A , $\iint_S \langle \text{rot } A, n \rangle da = \iint_{S'} \langle \text{rot } A, n \rangle da$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie a bordo fissato è indipendente dalla superficie. Equivalentemente, se Σ è una superficie orientata chiusa, ovvero $\partial \Sigma = \emptyset$, si ha $\iint_{\Sigma} \langle \text{rot } A, n \rangle da = 0$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie chiusa è nullo. Quindi i campi vettoriali F che sono rotori di altri campi vettoriali A (ossia $F = \text{rot } A$), giocano dal punto di vista degli integrali di superficie di seconda specie lo stesso ruolo che giocano i campi conservativi (ossia i gradienti) nel caso degli integrali curvilinei di seconda specie. Se $F = \text{rot } A$, il campo A viene detto potenziale vettore di F . L'esempio classico di un

campo che ammette potenziale vettore è costituito dal campo magnetico \vec{B} , oppure dal campo di velocità di un fluido stazionario incomprimibile.

Divergenza di un campo vettoriale $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si tratta della quantità scalare $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$. Una condizione necessaria affinché un campo di classe C^1 sia un rotore è che abbia divergenza nulla, ovvero che sia solenoidale. Si ha cioè che $F = \operatorname{rot} A$ in un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ implica $\operatorname{div} F = 0$ su D . Tale risultato è conseguenza del teorema di Schwarz.

La condizione non è in generale sufficiente: si prenda ad esempio $F(p) = \frac{i_r}{r^2} = \frac{p}{|p|^3}$ il campo elettrostatico generato da una carica positiva puntiforme situata nell'origine di \mathbb{R}^3 . Tale campo è solenoidale nel suo dominio di definizione $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$, ma non è il rotore di alcun campo vettoriale definito sullo stesso dominio, in quanto detta Σ la superficie sferica di centro l'origine e raggio $R > 0$ (Σ è una superficie chiusa) orientata dal versore radiale $i_r = \frac{p}{|p|}$, si ha

$$\iint_{\Sigma} \langle F, n \rangle da = \iint_{\Sigma} \langle \frac{i_r}{R^2}, i_r \rangle da = \frac{1}{R^2} \int_{\Sigma} da = 4\pi \neq 0.$$

La condizione $\operatorname{div} F = 0$ risulta sufficiente affinché sia $F = \operatorname{rot} A$ ad esempio su domini convessi (Lemma di Poincaré). In realtà detta implicazione è vera su domini D che verificano certe ipotesi meno stringenti (in buona sostanza, se per ogni superficie chiusa S in D , si ha $S = \partial V$ con V interamente contenuto in D).