ANALISI MATEMATICA II
-QUINTO FOGLIO DI ESERCIZI-
AA 2015-2016

GIULIA CAVAGNARI

Esercizio 1 (4 pt.). Si considerino la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\Phi(z,\theta) = ((2+\sin 3z)\cos\theta, (2+\sin 3z)\sin\theta, z) \quad \text{con } z \in [0,\pi],\ \theta \in [0,2\pi],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\vec{F}(x,y,z) = (\sin^2 x\, \sin y, 2\sin x\, \cos x\, \cos y, \sin y).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è solenoidale e/o conservativo.
(2) Si calcolino l'elemento d'area e la normale ad S.
(3) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso S.

Esercizio 2 (8 pt.). Si consideri la seguente successione di funzioni:

$$u_N(t,x) = \frac{e^{-t}}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi} e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx).$$

definite su $\Omega := \{(t,x) : t > 0,\ x \in]0,\pi[\}$.
(a) Si studi la convergenza puntuale di u_N, $\partial_t u_N$, $\partial_{xx} u_N$ per $N \to +\infty$ in Ω e quella uniforme per $N \to +\infty$ sui compatti di Ω .
(b) Posto $u(t,x) = \lim_{N\to\infty} u_N(t,x)$ si dica se $u(t,x)$ risolve in Ω l'equazione

$$\partial_t u - 2\partial_{xx} u + u = 0.$$

Tutte le risposte vanno motivate.

Esercizio 3 (8 pt.). Per ciascuna delle seguenti serie individuare l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n\log n}$,
(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\log^n(1-x)$,
(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{ne^{nx}}{2n+1}}$,
(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+n}{n+1}(x^2+1)^{n/2}$.

Esercizio 4 (4 pt.). Si studi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e uniforme della successione $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f_n(x) = \frac{nx^\alpha}{1+n^2x^2}.$$

Esercizio 5 (6 pt.). Individuare l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme delle seguenti serie:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{n^2+1}x^n$,

---

Date: 10 dicembre 2015.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6^x - 3)^n}{n \arctan n}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{(3x - 2)^n}$.

Consegna entro: martedì 22 dicembre 2015

E-mail address: giulia.cavagnari@unitn.it