URTI: Collisioni fra particelle (e/o corpi) libere e vincolate.

Approssimazione di impulso: l'interazione fra le due particelle e/o corpi è istantanea e l'azione delle forze esterne durante l'urto non è tale da cambiare lo stato di moto (traslazionale e rotazionale) del sistema delle due particelle nel suo insieme.

Lo stato di moto del centro di massa non cambia durante l'urto.

Si tratta di studiare il moto del sistema dopo l'urto, cioè il moto del CM del sistema e delle due particelle relativamente al CM.

Generalmente si conosce lo stato (masse + velocità) delle particelle (e/o corpi) prima dell'urto e si tratta di trovare lo stato di moto (masse + velocità) delle particelle dopo l'urto.

Ipotesi: le masse delle particelle individuali o dei due corpi non variano durante l'urto, quindi si tratta di determinare le velocità delle particelle o dei due corpi subito dopo l'urto .

Due classi di fenomeni: Urti tra PM liberi e tra PM vincolati.
Caso di corpi e/o particelle libere o soggette a forze esterne non impulsive.

Nel caso di un sistema isolato si ha la conservazione della quantità di moto del sistema durante l'urto, dato che entrano in gioco solo forze interne.
N.B: La quantità di moto del sistema durante l'urto si conserva anche nel caso di sistema non isolato se le forze esterne non sono impulsive.

$\Rightarrow$ Es. pendolo balistico, i.e.: corpo di massa attaccato all'estremità di un filo avente l'altra estremità fissata ad un punto fisso O di un piano verticale. Corpo urtato da un PM con $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$

Se invece durante l'urto, nel caso di un sistema vincolato, le forze esterne sono impulsive, non si conserva la quantità di moto del sistema, dato che entrano in gioco, oltre a forze interne impulsive, anche forze esterne (dovute alla reazione vincolare) avente carattere impulsivo. In tal caso si conserva il momento angolare.

$\Rightarrow$ Es. pendolo balistico, i.e.: corpo di massa attaccato all'estremità di un'asta imperniata ad un punto fisso O del piano verticale. Corpo urtato anelasticamente da un PM con $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$.

In questo caso si conserva il momento della quantità di moto totale del sistema durante l'urto rispetto al polo O in cui è imperniato il corpo che viene urtato dal PM.

Urti centrali fra particelle (e/o corpi) libere nel sistema L

Definizione di urto centrale: quando la velocità relativa delle due particelle è diretta lungo la retta congiungente le due particelle, si parla di un urto in una dimensione.

Conservazione della quantità di moto nel caso di particelle libere o soggette a forze esterne non impulsive.

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d}$$

cioé:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

N.B.: Un'equazione vettoriale con due (1+1) incognite; che origina 1 sola equazioni scalare in due incognite, e quindi il problema non si risolve solo usando la conservazione di $\mathbf{P}_S$.

Per risolvere il problema, bisogna trovare una condizione aggiuntiva che viene di solito fornita dall'energia cinetica del sistema prima dell'urto e subito dopo l'urto.

N.B.: Nel caso di urto non centrale (i.e.: urto piano), dalla (1) si otterranno due equazioni scalari: una per la componente lungo x e l'altra per la componente lungo y.
Cosa succede all'energia cinetica $E_{k,S}$ del sistema prima e dopo l'urto? L'energia cinetica totale $E_{k,S}$ del sistema:

– si conserva solo nel caso di urto elastico (in questo caso le forze interne che entrano in gioco durante l'urto sono conservative);
– ma NON non si conserva nel caso di urto anelastico (le forze interne che entrano in gioco durante l'urto non sono conservative).

Urti anelastici. Energia dissipata nell'urto: $E_D = \Delta E_k$, è sempre <0!
La variazione di energia cinetica è detta anche Q–valore: $Q = \Delta E_k$.

Nel caso di urto completamente anelastico, dopo l'urto le due particelle rimangono attaccate e se ne vanno con la velocità del centro di massa, e quindi sarà $E_{K,S,d} = E_{k,CM,p}$ dal momento che la velocità del CM è la stessa prima e dopo l'urto.

N.B.: Urto completamente anelastico: $(E_{k,d}^{INT} = 0,\ Q = -E_{k,p}^{INT})$

Conservazione della sola quantità di moto:

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d} \quad \Rightarrow \quad m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = (m_1 + m_2)\,\mathbf{v}_{CM}$$

che nel caso di urto centrale origina una sola equazione scalare.

L'energia cinetica $E_{k,S}$ del sistema non si conserva, ma si conserva l'energia cinetica $E_{k,CM}$ del centro di massa. Quindi in un urto anelastico, l'energia cinetica interna del sistema prima dell'urto viene dissipata durante l'urto anelastico stesso.
Quindi E_D corrisponde alla variazione di energia cinetica:

$$E_D = (½m_1v_{1,d}^2 + ½m_2v_{2,d}^2) - (½m_1\,v_{1,p}^2 + ½m_1\,v_{1,p}^2) = -½\,\mu\,v_{12}^2$$

Di fatto, per l'energia dissipata, si ha:

$$E_D = E_{k,d} - E_{k,p} = - E_{k,p}^{INT}$$

Esercizi:

1) proiettile di massa m sparato con velocità orizzontale $\mathbf{v}_0$ contro blocco di legno di massa M (>>m) vincolato a una fune di lunghezza L in configurazione di equilibrio statico (pendolo balistico): calcolo della quota h_{max} dopo l'urto.

2) particella di massa m lasciata cadere su una piastra di massa M in posizione di equilibrio sopra una molla di costante elastica k.

<u>Urti elastici</u>: $E_{K,p} = E_{K,d}$ (i..e.: Q = 0) e quindi:

$$½m_1\, v_{1,p}^2 + ½m_2\, v_{2,p}^2 = ½m_1\, v_{1,d}^2 + ½m_2\, v_{2,d}^2 \qquad (2)$$

Questa è la seconda equazione scalare da accoppiare alla:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

(che va proiettata lungo l'asse che individua la direzione del moto delle due particelle che si urtano centralmente) per risolvere il problema della determinazione di $v_{1,d}$ e $v_{2,d}$.

Da (1) si ha: $\quad m_1(v_{1,p} - v_{1d}) = m_2(v_{2d} - v_{2,p}) \qquad (1')$

Da (2) si ha: $\quad ½m_1\,(v_{1,p}^2 - v_{1,d}^2) = ½m_2\,(v_{2,d}^2 - v_{2,p}^2)$, cioé

$$m_1\,(v_{1,p} - v_{1,d})\,(v_{1,p} + v_{1,d}) = m_2\,(v_{2,d} - v_{2,p})\,(v_{2,d} + v_{2,p})$$

e ricordando la (1') si ha: $(v_{1,p} + v_{1,d}) = (v_{2,d} + v_{2,p})$, cioè:

$$v_{1,d} - v_{2,d} = v_{2,p} - v_{1,p} \qquad (3)$$

In un urto centrale elastico la velocità di avvicinamento prima dell'urto è opposta alla velocità di allontanamento dopo l'urto.

Risolvendo ora il sistema di equazioni la (3) e la (1'):

$$v_{1,d} - v_{2,d} = v_{2,p} - v_{1,p} \qquad (3)$$

$$m_1(v_{1,p} - v_{1d}) = m_2(v_{2d} - v_{2,p}) \qquad (1')$$

si ottengono le velocità delle particelle dopo l'urto:

$$v_{1d} = [(m_1 - m_2)\, v_{1p} + 2\, m_2 v_{2p}]/(m_1 + m_2) \qquad (4)$$

e

$$v_{2d} = [(m_2 - m_1)\, v_{2p} + 2\, m_1 v_{1p}]/(m_1 + m_2) \qquad (5)$$

Casi particolarmente interessanti:

1) masse uguali $m_1 = m_2$: dalle (4) + (5) si ha:

$$v_{1d} = v_{2p}$$
$$v_{2d} = v_{1p}$$

cioé durante l'urto i due corpi si scambiano le velocità.

2) massa m_2 inizialmente in quiete: dalle (4) + (5) si ha:

$$v_{1d} = [(m_1 - m_2)/(m_1+m_2)]v_{1p}$$
$$v_{2d} = [2m_1/(m_1+m_2)]v_{1p}$$

a)se $m_1 = m_2$ si ha $v_{1d} = 0$ e $v_{2d} = v_{1p}$

b) se $m_1>m_2$, allora v_{1d} e v_{2d} hanno lo stesso segno ma $v_{2d} > v_{1d}$, cioé la particella urtante procede anche dopo l'urto nel verso iniziale ma con velocità minore.

c)se $m_1<m_2$, allora $v_{1d} <0$ ed è in modulo $< v_{1p}$, cioé la particella 1 rimbalza con velocità ridotta.

d) se $m_2 = \infty$, $v_{2d} = 0$ e $v_{1d} = - v_{1p}$, cioè rimbalza.

Esercizi:

1) pendolo ideale di massa m, lasciato andare dalla configurazione orizzontale, che urta un blocco M (>>m) in quiete sul piano orizzontale liscio.

2) blocco di massa M lanciato contro corpo puntiforme di massa m posta in quiete alla base di un profilo circolare di raggio R.

Urti centrali fra particelle libere nel sistema C:

Per quanto riguarda l’energia cinetica interna, usando la relazione di Konig per l’energia cinetica, si ha:

$E_{k,,p} = ½m_1v_{i,p}^2+½\ m_2v_{2,p}^2 = ½\ Mv_{CM,p}^2 + E'_{k,p} = E_{k,CM} + E'_{k,p}$

$E_{k,,d} = ½m_1v_{i,d}^2+½\ m_2v_{2,d}^2 = ½\ Mv_{CM,d}^2 + E'_{k,d} = E_{k,CM} + E'_{k,d}$

E dato che l’energia cinetica del CM del sistema si conserva prima e dopo l’urto ($E_{k,CM}$ non cambia) si avrà:

<u>Urto perfettamente elastico</u>: ($E_{k,p} = E_{k,d}$)

$\mathbf{P'}_{S,p} = m_1\mathbf{v'}_{1.p} + m_2\mathbf{v'}_{2,p} = 0 = \mathbf{P'}_{S,d} = m_1\mathbf{v'}_{1d} + m_2\mathbf{v'}_{2d}$

Cioè: $m_1\mathbf{v'}_{1,p} = - m_2\mathbf{v'}_{2,p}$ e $m_1\mathbf{v'}_{1,d} = - m_2\mathbf{v'}_{2,d}$ ($\mathbf{p'}_1 = - \mathbf{p'}_2$)

Per quanto riguarda l’energia cinetica interna, usando la relazione di Konig per l’energia cinetica, si ha $E'_{k,d} = E'_{k,p}$:

$$½m_1\ v'^2_{1,p} + ½m_1\ v'^2_{1,p} = ½m_1\ v'^2_{1,d} + ½m_2\ v'^2_{2,d}$$

<u>Urto completamente anelastico</u>: ($E'_{k,d} = 0$)

Dopo l’urto le due particelle rimangono attaccate e se ne vanno con la velocità del centro di massa.

Conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{P'}_{S,p} = \mathbf{P'}_{S,d} \quad \Rightarrow \quad m_1\mathbf{v'}_{1,p} + m_2\mathbf{v'}_{2,p} = \mathbf{0}$$

Mentre per l’energia, si ha:

$$E_D = E_{k,,d} - E_{k,,p} = - E'_{k,p}$$

A) Urti fra particelle libere e corpi rigidi liberi.

Urto elastico: oltre alla conservazione della quantità di moto totale e dell’energia cinetica totale del sistema durante l’urto, bisogna considerare anche la conservazione del momento angolare intrinseco.

Urto completamente anelastico: si ha la conservazione della quantità di moto totale del sistema durante l’urto, e anche la conservazione del momento angolare intrinseco.

B) Urti fra particelle libere e corpi rigidi vincolati

Urto perfettamente anelastico: si conserva solamente il momento angolare totale rispetto al punto O in cui è imperniato il corpo urtato. L’energia dissipata nell’urto è data dalla variazione dell’energia propria U del sistema.

Urti centrali fra particelle libere nel sistema L del Laboratorio

Definizione di urto centrale: urto in una dimensione.

Conservazione della quantità di moto nel caso di particelle libere o o soggette a forze esterne non impulsive.

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d}$$

cioé:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

N.B.: Un'equazione vettoriale con due (1+1) incognite; che origina 1 sola equazioni scalare in due incognite, e quindi il problema non si risolve solo con la conservazione di $\mathbf{P}_S$.

Per risolvere il problema, bisogna trovare una condizione aggiuntiva che viene di solito fornita dall'energia cinetica del sistema prima dell'urto e subito dopo l'urto.

Urti elastici e anelastici. Energia dissipata (E_D) nell'urto.

Cosa succede all'energia cinetica del sistema prima e dopo:
– si conserva solo nel caso di urto elastico (le forze interne che entrano in gioco durante l'urto sono conservative);
– non si conserva nel caso di urto anelastico (le forze interne che entrano in gioco l'urto non sono conservative).

La variazione di energia cinetica è detta anche Q–valore.

Urti elastici : $E_{k,p} = E_{k,d}$ (i..e.: Q = 0) e quindi:

$$½m_1 v_{1,p}^2 + ½m_1 v_{1,p}^2 = ½m_1 v_{1,d}^2 + ½m_2 v_{2,d}^2 \qquad (2)$$

Questa è la seconda equazione scalare da accoppiare alla:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

(che va proiettata lungo l'asse che individua la direzione del moto delle due particelle che si urtano centralmente) per risolvere il problema della determinazione di $v_{1,d}$ e $v_{2,d}$.

Urto completamente anelastico: ($E'_{k,d} = 0$, $Q = -E'_{k,p}$)

Dopo l'urto le due particelle rimangono attaccate e se ne vanno con la velocità del centro di massa.

Conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d} \qquad \Rightarrow \qquad m_1\mathbf{v}_{1.p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = (m_1 + m_2)\,\mathbf{v}_{CM}$$

Mentre per l'energia, si ha:

$$E_D = E_{k,,d} - E_{k,,p} = -E'_{k,p}$$

Urto completamente anelastico nel sistema L:

$$m_1\mathbf{v}_{1.p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = (m_1 + m_2)\,\mathbf{v}_{CM}$$

$$E_D = \tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,d}^{\;2} + \tfrac{1}{2}m_2\,v_{2,d}^{\;2} - \tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,p}^{\;2} + \tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,p}^{\;2} = \tfrac{1}{2}\,\mu\,v_{12}^{\;2}$$

Urti centrali fra particelle libere nel sistema C del CM

$\mathbf{P'}_{S,p} = m_1\mathbf{v'}_{1.p} + m_2\mathbf{v'}_{2,p} = 0 = \mathbf{P'}_{S,d} = m_1\mathbf{v'}_{1d} + m_2\mathbf{v'}_{2d}$

Cioè: $m_1\mathbf{v'}_{1,p} = -m_2\mathbf{v'}_{2,p}$ e $m_1\mathbf{v'}_{1,d} = -m_2\mathbf{v'}_{2,d}$ ($\mathbf{p'}_1 = -\mathbf{p'}_2$)

Per quanto riguarda l'energia cinetica interna, usando la relazione di Konig per l'energia cinetica, si ha:

$E_{k,,p} = \tfrac{1}{2}m_1v_{i,p}^{\;2} + \tfrac{1}{2}\,m_2v_{2,p}^{\;2} = \tfrac{1}{2}\,Mv_{CM,p}^{\;2} + E'_{k,p} = E_{k,CM} + E'_{k,p}$
$E_{k,,d} = \tfrac{1}{2}m_1v_{i,d}^{\;2} + \tfrac{1}{2}\,m_2v_{2,d}^{\;2} = \tfrac{1}{2}\,Mv_{CM,d}^{\;2} + E'_{k,d} = E_{k,CM} + E'_{k,d}$
E dato che l'energia cinetica del CM del sistema si conserva prima e dopo l'urto (dato che $E_{k,CM}$ non cambia) si avrà:

Quindi se $E_{k,,p} = E_{k,,d}$ (urto elastico), allora è pure:

$$E'_{k,d} = E'_{k,p}$$

cioè:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v'^2_{1,p} + \tfrac{1}{2} m_1 v'^2_{1,p} = \tfrac{1}{2} m_1 v'^2_{1,d} + \tfrac{1}{2} m_2 v'^2_{2,d}$$

<u>Urto completamente anelastico</u>: ($E'_{k,d} = 0$)

Dopo l'urto le due particelle rimangono attaccate e se ne vanno con la velocità del centro di massa.

Conviene lavorare nel sistema L.
Conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d} \qquad \Rightarrow \qquad m_1 \mathbf{v}_{1,p} + m_2 \mathbf{v}_{2,p} = (m_1 + m_2)\, \mathbf{v}_{CM}$$

Mentre per l'energia, si ha:

$$E_D = E_{k,,d} - E_{k,,p} = - E'_{k,p}$$

Urto completamente anelastico nel sistema L:

$$m_1 \mathbf{v}_{1,p} + m_2 \mathbf{v}_{2,p} = (m_1 + m_2)\, \mathbf{v}_{CM}$$

(da proiettare lungo l'asse che individua la direzione del moto delle due particelle che si urtano centralmente):

$$E_D = \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v_{CM,d}^2 - \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,p}^2 - \tfrac{1}{2} m_1 v_{2,p}^2 = -\tfrac{1}{2} \mu\, v_{12,p}^2$$

(N.B.: $\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,p}^2 + \tfrac{1}{2} m_1 v_{2,p}^2 = \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v_{CM,p}^2 + \tfrac{1}{2} \mu\, v_{12,p}^2$)

Nel caso di urto unidimensionale il problema è completamente definito: perché il numero di incognite si riduce a due e le due relazioni scalari una dalla quantità di moto e una dalla relazione sull'energia bastano.

Esempio: pendolo balistico, granata che esplode in volo.

Conservazione del momento angolare nel caso di particelle vincolate rigidamente ad un perno.

Pendolo fisico costituito da un’asta imperniata ad un’estremità e colpito da un proiettile che viaggia in direzione orizzontale e che si fissa all’altra estremità

<u>Urti elastici</u>: si conserva l’energia cinetica interna, perché le forze interne sono conservative.

<u>Si può usare indifferentemente nel sistema L o sistema C</u>

Sistema L:

Conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d} \quad \Rightarrow \quad m_1\mathbf{v}_{1.p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\,\mathbf{v}_{1.d} + m_2\mathbf{v}_{2,d}$$

Conservazione dell’energia cinetica durante l’urto:

$$E_{k,,d} = E_{k,,p} \Rightarrow \tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,d}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\,v_{2,d}^2 = \tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,p}^2 + \tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,p}^2$$

Nel caso di urto unidimensionale il problema è completamente definito: perché il numero di incognite si riduce a due e le due relazioni scalari una dalla quantità di moto e una dalla relazione sull’energia bastano:

$$m_1v_{1.p} + m_2v_{2,p} = m_1\,v_{1.d} + m_2v_{2,d}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,d}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\,v_{2,d}^2 = \tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,p}^2 + \tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,p}^2$$

Urti fra corpi puntiformi vincolati: conservazione del momento della quantità di moto e dell'energia propria.