

Esercitazione I: calcolo dei predittori.

Nel corso si sono studiati modelli appartenenti alla seguente famiglia di modelli

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(k) \quad (1)$$

Dove $e(k)$ è un rumore bianco a media nulla ed in cui solo alcuni dei polinomi in q sono diversi da 1. Si è altresì dimostrato come per la famiglia di modelli

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)e(k) \quad (2)$$

il predittore sia dato dalla seguente

$$\hat{y}(k|k-1) = H^{-1}(q)G(q)u(k) + [1 - H^{-1}(q)]y(k) \quad (3)$$

Pertanto, per determinare i predittori richiesti è sufficiente declinare la formula nei casi in esame

Modello ARX

Il modello arx in esame può essere riscritto nella seguente formulazione

$$y(k) + 0.2 y(k-1) + 0.3 y(k-2) = u(k-1) + e(k)$$

Introducendo l'operatore di ritardo q si ricava che

$$[1 + 0.2q^{-1} + 0.3q^{-2}]y(k) = q^{-1}u(k) + e(k)$$

L'espressione rientra nella famiglia generale (1) una volta imposti i seguenti polinomi

$$A(q) = 1 + 0.2q^{-1} + 0.3q^{-2} \quad B(q) = q^{-1} \quad C(q) = D(q) = F(q) = 1$$

Mentre per rientrare nella (2) diviene necessario imporre

$$H(q) = \frac{1}{A(q)} \quad G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$$

Da cui il predittore risulta essere

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1) &= H^{-1}(q)G(q)u(k) + [1 - H^{-1}(q)]y(k) = A(q)\frac{B(q)}{A(q)}u(k) + [1 - A(q)]y(k) = \\ &= q^{-1}u(k) - 0.2q^{-1}y(k) - 0.3q^{-2}y(k) = u(k-1) - 0.2y(k-1) - 0.3y(k-2) \end{aligned}$$

Modello OE

Il modello oe in esame può essere derivato dalla (1) imponendo

$$F(q) = 1 + 0.2q^{-1} + 0.3q^{-2} \quad B(q) = q^{-1} \quad A(q) = C(q) = D(q) = 1$$

Mentre per rientrare nella (2) diviene necessario imporre

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)} \quad H(q) = 1$$

Il predittore risulta essere

$$\hat{y}(k|k-1) = H^{-1}(q)G(q)u(k) + [1 - H^{-1}(q)]y(k) = 1 \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + [1 - 1]y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k)$$

Da cui si ricava

$$F(q)\hat{y}(k|k-1) = B(q)u(k)$$

$$\hat{y}(k|k-1) + 0.2q^{-1}\hat{y}(k|k-1) + 0.3q^{-2}\hat{y}(k|k-1) = q^{-1}u(k)$$

Per cui il predittore risulta essere

$$\hat{y}(k|k-1) = -0.2\hat{y}(k-1|k-2) - 0.3\hat{y}(k-2|k-3) + q^{-1}u(k)$$

Remark si noti come i due predittori sebbene sembrano uguali sono molto diversi. Il predittore *ARX* usa le uscite del sistema mentre il predittore *OE* non usa alcun valore relativo alle uscite passate ma solo i valori stimati.