UNIVERSITÀ di **VERONA**

Corso di Laurea Triennale in **Matematica Applicata**

Preparazione al primo foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 2 ottobre 2017

Esercizio 1. Si tracci il grafico delle seguenti regioni del piano cartesiano:

(1.1) $D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + 3y^2 > 2\}$.

(1.2) $D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x + y, x + 3y > 1, x^2 + y^2 < y\}$.

(1.3) $D_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq x + y, 3y - x > 1, 2x^2 + 3y^2 < 1\}$.

Esercizio 2. Si risolvano le seguenti disequazioni:

(2.1) $\log(x^2) - \log^2 x \geq 0$.

(2.2) $\dfrac{\sqrt{|x| - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \geq \dfrac{x + 3}{|x| + 1}$.

(2.3) $\sin x + \sqrt{3} \cos x > 0$.

Esercizio 3. Si dica se esistono i seguenti limiti e, in caso affermativo, li si calcoli:

(3.1) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{\log^2(1 + x^2)}$.

(3.2) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan(\sin x) - x \cos x}{x^5}$.

Esercizio 4. Al variare di $\alpha, \beta \geq 0$, si studi la derivabilità della seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, calcolandone la derivata ove possibile, e stabilendo se la derivata è continua in un intorno dell'origine.

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^\beta \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. Si calcolino i seguenti integrali:

(5.1) $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{2x\,dx}{x^2 - 6x}$.

(5.2) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\sin^2 x + 3\sin x + 4\sin^4 x \cos x\right)\, dx$.

(5.3) $\displaystyle\int_0^t \sqrt{6 + 4x^2}\, dx$.

Esercizio 6. Si risolvano le seguenti equazioni differenziali:

(6.1) $5\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - x(t) = 0$.

(6.2) $6\dot{x}(t) + t\sqrt{1 - x(t)} = 0$.

(6.3) $5\ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 25x(t) = 0$.

Esercitazioni di Analisi Matematica 2
Dr. Antonio Marigonda
antonio.marigonda@univr.it
TEL. +39 045 8027809

Tutorato di Analisi Matematica 2
Dr. Damiano Rigo
id833sck@studenti.univr.it

Primo foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 2 ottobre 2017

Esercizio 1. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano finiti i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad \lim_{x\to \xi} f(x), \text{ per ogni } \xi \in]0,1[.$$

Si definisca $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$g(\xi) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\xi} f(x), & \text{per } \xi \in]0,1[, \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x), & \text{per } \xi = 0, \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x), & \text{per } \xi = 1. \end{cases}$$

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere oppure false fornendo per ciascuna una dimostrazione o un controesempio.

(1) f è continua in $[0,1]$;
(2) f è limitata in $[0,1]$;
(3) g è continua in $[0,1]$.

Esercizio 2. Sia X l'insieme delle coppie (f,g) tali che $f, g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ siano funzioni continue in $[0,+\infty[$, di classe C^1 in $]0,+\infty[$, e soddisfino $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, $f'(x) \in]-3,-2[$, $g'(x) \in]1,2[$ per ogni $x > 0$.

(1) Si provi che per ogni $(f,g) \in X$ esiste un unico punto $x_{fg} > 0$ con $f(x_{fg}) = g(x_{fg})$.
(2) Si determinino

$$\inf\{x_{fg} : (f,g) \in X\}, \qquad \sup\{x_{fg} : (f,g) \in X\}.$$

Esercizio 3. Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\dot{y}(t) = t^2\sqrt{1 + y(t)}$$

con la condizione $y(0) = 0$, indicando il dominio massimale di esistenza della soluzione.

Esercizio 4. Si costruisca una successione di numeri reali positivi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq]0,+\infty[$ tale che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty, \qquad \limsup_{n\to+\infty} n a_n > 0.$$

Esercitazioni di Analisi Matematica 2
Dr. Antonio Marigonda
antonio.marigonda@univr.it
TEL. +39 045 8027809

Tutorato di Analisi Matematica 2
Dr. Damiano Rigo
id833sck@studenti.univr.it

Secondo foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 6 ottobre 2017

Esercizio 1. Sia (X, d_X) uno spazio metrico. Si definisca la funzione $\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Si provi che anche $\tilde{d}$ è una metrica su X. In generale, data una funzione $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ crescente, soddisfacente a $\varphi(t+s) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$ per ogni $s, t \geq 0$, $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(t) > 0$ se $t > 0$, si provi che la funzione $\hat{d} := \varphi \circ d_X$ è una metrica su X.

Esercizio 2. Sia (X, d_X) uno spazio metrico, $x_0 \in X$, $r > 0$. Poniamo

$$\begin{aligned} B(x_0, r) =& \{x \in X : d_X(x, x_0) < r\}, \\ S(x_0, r) =& \{x \in X : d_X(x, x_0) = r\}, \\ K(x_0, r) =& \{x \in X : d_X(x, x_0) \leq r\}. \end{aligned}$$

Si provi in generale che $\partial B(x_0, r) \subseteq S(x_0, r)$ e che $\overline{B(x_0, r)} \subseteq K(x_0, r)$.

Sia ora X un insieme con più di due elementi e poniamo $d_X(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d_X(x, y) = 1$ se $x \neq y$.

(1) Si provi che (X, d_X) è uno spazio metrico.
(2) Si provi che ogni punto di X è sia chiuso che aperto per la topologia indotta da d_X.
(3) Si provi che d_X induce su X la topologia discreta.
(4) Si provi che la frontiera di ogni sottoinsieme di X è vuota.
(5) Si provi che esiste $r > 0$ e $x_0 \in X$ tale che $\partial B(x_0, r)$ è strettamente contenuta in $S(x_0, r)$ e che $\overline{B(x_0, r)}$ è strettamente contenuta in $K(x_0, r)$.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$. Per ciascuno di essi si dica se è aperto, se è chiuso, se è compatto. Se ne descrivano inoltre interno e chiusura. Tutte le risposte vanno accuratamente motivate.

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 - 2y \leq 1\right\}; \\ S_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 y^5 > 3\right\}; \\ S_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\tan y + e^x| \leq 2\right\}; \\ S_4 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0,\, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1\right\}. \end{aligned}$$

Esercitazioni di Analisi Matematica 2
Dr. Antonio Marigonda
antonio.marigonda@univr.it
TEL. +39 045 8027809

Tutorato di Analisi Matematica 2
Dr. Damiano Rigo
id833sck@studenti.univr.it

Terzo foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 13 ottobre 2017

Esercizio 1. Sia $p \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto tale che $A \supseteq \alpha A$ per ogni $\alpha > 0$ (nel senso che se $x \in A$, allora $\alpha x \in A$ per ogni $\alpha > 0$), e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile soddisfacente la seguente proprietà: esiste $p > 0$ tale che

$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^p f(x_1, \dots, x_n), \text{ per ogni } (x_1, \dots, x_n) \in A.$$

Si provi che allora vale l'*identità di Eulero*

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) \cdot x_i = p f(x_1, \dots, x_n).$$

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie Σ di equazione $z = f(x, y)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0.$$

(1) Si dica se f è continua e se è differenziabile nel suo dominio.
(2) Si scriva l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $P = (2, 2, f(2, 2))$.

Esercizio 3. Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 6|y| \neq 0\}$, si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2y(x - y^2)}{x^2 + y^2 + 6|y|}.$$

(1) Si dica se esiste una funzione continua $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f = g$ su D. Si dica se tale funzione è differenziabile, e se è unica.
(2) Posto $\Omega_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|^\alpha\}$ per $\alpha > 0$, si dica se esistono $\alpha > 0$ e una funzione differenziabile $g_\alpha : \Omega_\alpha \to \mathbb{R}$ tali che $g_\alpha = f$ su $D \cap \Omega_\alpha$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, e si ponga

$$\Omega_c = \{(x, y) : f(x, y) < c\}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $c \in \mathbb{R}$ sia tale che $\Omega_c \neq \emptyset$, e che esista $P_c := (x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(x_c, y_c) = c$.

(1) Si provi che se $\nabla f(x_c, y_c) \neq (0, 0)$ allora $P_c \in \partial \Omega_c$.
(2) Si provi che, in generale, rimuovendo l'ipotesi $\nabla f(x_c, y_c) \neq (0, 0)$, non è più garantito che $P_c \in \partial \Omega_c$.

Esercitazioni di Analisi Matematica 2
Dr. Antonio Marigonda
antonio.marigonda@univr.it
TEL. +39 045 8027809

Tutorato di Analisi Matematica 2
Dr. Damiano Rigo
id833sck@studenti.univr.it

UNIVERSITÀ di **VERONA**

Corso di Laurea Triennale in **Matematica Applicata**

Quarto foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 21 ottobre 2017

Esercizio 1.

(1) Trovare il dominio della funzione $f(x,y) = |x|\log(1+y)$ e dire se essa è differenziabile nel punto $(0,0)$.

(2) Trovare il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$ e dire se è differenziabile in $(0,1)$.

(3) Dire se la seguente funzione è continua e differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ e calcolare le derivate direzionali nell'origine:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^3}-1}{x^2+y^2}, & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(4) Trovare il dominio della funzione $g(x,y) = \sqrt{|x|}\tan y$ e dire se è differenziabile nel punto $(0,0)$.

(5) Trovare il dominio della funzione $g(x,y) = \sqrt{\sin^4 x(y^3+1)}$ e dire se è differenziabile nel punto $(0,1)$.

(6) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, dire se la seguente funzione è continua e differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ e calcolare le derivate direzionali nell'origine:

$$g_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{|x|^\alpha \log|x|}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{per } x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$, si consideri la funzione $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$F_a(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2).$$

Sia $\varphi_a :]-\sqrt{2}a, \sqrt{2}a[\to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, strettamente monotona in un intorno di 0, e tale che $F_a(x,\varphi_a(x)) = 0$ per ogni $x \in]-\sqrt{2}a, \sqrt{2}a[$. Si calcoli $\varphi_a'(0)$.

Esercitazioni di Analisi Matematica 2
Dr. Antonio Marigonda
antonio.marigonda@univr.it
TEL. +39 045 8027809

Tutorato di Analisi Matematica 2
Dr. Damiano Rigo
id833sck@studenti.univr.it

Quinto foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 27 ottobre 2017

Esercizio 1. Trovare gli estremi liberi delle seguenti funzioni e classificarli:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \sinh(x^4+y^3-4x^2-3y^2),\\
f_2(x,y) &= x^4+y^4-2(x-y)^2+2,\\
f_3(x,y) &= x^3+2x^2+x+y^3+2y^2+y,\\
g_1(x,y) &= \cosh(2x^4+5y^3-x^2-6y^2),\\
g_2(x,y) &= 3x^4+y^4-6(x-y)^2-1\\
g_3(x,y) &= 5x^3+4x^2-x-3y^3+y^2+2y.
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Data la funzione $f(x,y) := x^8+\alpha x^6 y+y^4$, se ne determinino i punti critici ed il massimo e minimo assoluto nell'insieme $E := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^8+y^4\le 1\}$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=(y+x^2)^2$.

(1) Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo liberi.
(2) Tracciare un grafico qualitativo di alcune linee di livello significative, indicando anche il valore del livello, in modo da comprenderne l'andamento.
(3) Indicata poi con γ la curva di equazione $x^2+y^2-4=0$, si calcolino i punti di massimo e minimo (relativi e assoluti) della funzione f vincolata a γ
   (a) mediante l'analisi delle curve di livello;
   (b) mediante un'opportuna parametrizzazione di γ;
   (c) utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Sesto foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 4 novembre 2017

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{3x^2+2y^2-x} = 1\}$.

(1) Si determinino, se esistono, i punti di Γ alla massima e minima distanza dall'origine.

(2) Utilizzando il precedente, si determini se esiste un valore minimo finito per il raggio di un cerchio centrato nell'origine e contenente Γ.

(3) Si dica se Γ è compatto.

Esercizio 2. Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = e^y(1-y) - \dfrac{x^4}{4}$ sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 3. Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = xy^2 - 4x - 2y^2 + 8$ sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9,\, x + y \geq 3\}$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Supponiamo che $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$. Si definisca $F(x,y) = f(x) - f(y)$, e sia $\mathcal{N} := \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$. Si provi che esistono due curve $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 passanti per l'origine e un intorno W dell'origine in $\mathbb{R}^2$ tali che

$$\mathcal{N} \cap W = [\gamma_1(\mathbb{R}) \cup \gamma_2(\mathbb{R})] \cap W,$$

e tali che i vettori tangenti v_i alle curve γ_i, $i = 1, 2$, sono ortogonali nell'origine.

Settimo foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 10 novembre 2017

Esercizio 1. Si consideri il seguente insieme in $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2x^4 + 12x^2y^2 - \sqrt{2}\left(x^2+y^2\right)^{5/2} - 2y^4 = 0.\}$$

(1.1) Si scriva l'insieme Γ in coordinate polari, precisando con cura il dominio della parametrizzazione.

(1.2) Si dica se Γ è compatto.

(1.3) Si provi che Γ interseca le bisettrici dei quadranti in 5 punti distinti, di cui uno è l'origine. Si scriva la rette tangente a Γ nei punti di intersezione con gli assi diversi dall'origine. Si dica in quali punti in generale è possibile esplicitare localmente Γ come grafico di una funzione $y = \psi(x)$ o $x = \varphi(y)$.

(1.4) Si provi che Γ è inscritto nel cerchio centrato nell'origine e di raggio $\sqrt{2}$.

Esercizio 2. Si consideri l'iperbole equilatera $\mathscr{C}$ di equazione $x^2 - y^2 = 1$. Al variare di $P \in \mathscr{C}$, si consideri la famiglia delle circonferenze γ_P centrate in P e passanti per l'origine. Si descriva l'inviluppo di $\Gamma = \{\gamma_P\}_{P\in\mathscr{C}}$ e se ne tracci un grafico qualitativo.

Esercizio 3.

(3.1) Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{7x^3}{3} - 4x^2 + 12x + e^y - y^2$. Si dica quante funzioni $y = y(x)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono implicitamente definite da $f(x,y) = 0$. Per ciascuna di esse, si determinino i punti critici e se ne studi la natura.

(3.2) Si consideri la funzione $f(x,y,z) = x^2+4xy+2yz+3e^y+z^2-3$. Si provi che $f(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente in un intorno dell'origine una funzione $y = y(x,z)$ di classe C^1 soddisfacente a $y(0,0) = 0$. Si provi che $(0,0)$ è punto critico per tale funzione, e se studi la natura.

(3.3) Si provi che la relazione $x - e^y + y^2 = 0$ definisce implicitamente $y = y(x)$ come funzione di x in un intorno del punto $(1,0)$. Si calcoli

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x) - (x-1)}{(x-1)^2}.$$

Esercitazioni di Analisi Matematica 2
Dr. Antonio Marigonda
antonio.marigonda@univr.it
TEL. +39 045 8027809

Tutorato di Analisi Matematica 2
Dr. Damiano Rigo
id833sck@studenti.univr.it

Ottavo foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 18 novembre 2017

Esercizio 1. Sia $R > 0$. Calcolare il volume del solido V, intersezione tra il cilindro e la sfera, definito da:

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \, (x - R/2)^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4} \right\}.$$

Calcolare l'area della superficie S data dall'intersezione della superficie sferica con il cilindro definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \, (x - R/2)^2 + y^2 \le R^2/4\}.$$

Esercizio 2. Calcolare il baricentro della regione di spazio

$$V = \left\{ x \ge 0, \, y \ge 0, \, z \ge 0 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \le 1 \right\},$$

dove $a, b, c > 0$.

Esercizio 3. Dopo averne rappresentato i domini di integrazione, si inverta l'ordine di integrazione in ciascuno dei seguenti integrali.

Esempio: se $D = \{(x, y) : \, x \in [a, b], \, y \in [f_-(x), f_+(x)]\}$*, si trovino* $c, d \in \mathbb{R}$ *e* g_-, g_+ *tali che* $D = \{(x, y) : \, y \in [c, d], \, x \in [g_-(y), g_+(y)]\}$.

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) \, dy \right) dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin x} f(x, y) \, dy \right) dx,$$

$$\int_1^2 \left(\int_0^{\log x} f(x, y) \, dy \right) dx, \qquad \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} f(x, y) \, dx \right) dy,$$

$$\int_0^1 \left(\int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x, y) \, dy \right) dx, \qquad \int_0^1 \left(\int_{\arcsin y}^{\pi/2} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Esercizio 4. Rappresentare il dominio di integrazione dei seguenti integrali e calcolarli:

$$I_1 := \iint_{\Omega_1} \frac{|y|}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy, \text{ con } \Omega_1 := \{1 \le x^2 + y^2 \le 4x, \, |y| \le \sqrt{3}x\};$$

$$I_2 := \iint_{\Omega_2} y e^{y^2 + x} \, dx \, dy, \text{ con } \Omega_2 := \{0 \le x \le 2y^2, \, 0 \le y \le 1\};$$

$$I_3 := \iint_{\Omega_3} (1 + 4(x^2 + y^2)) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy, \text{ con } \Omega_3 := \{1 \le x^2 + y^2 \le 4\};$$

$$I_4 := \iint_{\Omega_4} \frac{x e^{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}}{x^2 + y^2} \, dx \, dy, \text{ con } \Omega_4 := \{|x| \le y \le 1\};$$

$$
\begin{aligned}
I_5 &:= \iiint_{\Omega_5} \frac{x^2+y^2}{z^2}\,dx\,dy\,dz,\ \text{con } \Omega_5 := \left\{x^2+y^2\le 1,\ \frac{1}{x^2+y^2}\le z\le \frac{2}{x^2+y^2}\right\};\\
I_6 &:= \iint_{\Omega_6} (1+x)\,dx\,dy,\ \text{con } \Omega_6 := \{y\ge |x|,\ y<\frac{1}{2}x+2\};\\
I_7 &:= \iint_{\Omega_7} (x^2-y^2)\log(1+(x+y)^4)\,dx\,dy,\ \text{con } \Omega_7 := \{x>0,\ 0<y<2-x\}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 5. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S ottenuta ruotando attorno alla retta $x=y=z$ la curva $\gamma:[0,1/2]\to\mathbb{R}^3$ di equazione $\gamma(t)=(t,0,t^2)$. Si scriva una parametrizzazione di S in coordinate opportune.

Nono foglio di esercizi di Analisi 2

Verona, 10 dicembre 2017

Esercizio 1.

(1) Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}$ definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ da
$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{3x^3+xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x^2y+3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$
Si stabilisca se il campo è conservativo: in caso affermativo se ne trovi una primitiva, mentre in caso negativo si fornisca una curva chiusa dove la circuitazione è non nulla. Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ sulla curva $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in [1,2]$.

(2) Determinare, usando la formula di Green, l'area della regione di piano D delimitata dalla curva $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(3) Sia Γ la frontiera della regione di piano D compresa tra le parabole $y = x^2$ e $x = y^2$ orientata positivamente. Calcolare l'integrale
$$I := \int_\Gamma (y + \arctan e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy.$$

(4) Fissato $r > 0$, si calcoli l'integrale: $I := \displaystyle\int_\gamma y\,ds$, essendo $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva di equazioni parametriche $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$.

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S di equazioni parametriche:
$$\varphi(\theta, y) = (e^{y^2-1}\sin\theta, y, e^{y^2-1}\cos\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ |y| < 1,$$
e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da
$$\vec{F}(x,y,z) = \left(y(z^2+x^2), \frac{y^2}{z^2+x^2+1}, z^2+x^2\right).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.

(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la circonferenza di raggio e, centrata in $(0,1,0)$ e appartenente al piano $y = 1$ parametrizzata da $\gamma(\theta) = (e\sin\theta, 1, e\cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.

(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1,1,0)$.

(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Dr. Antonio Marigonda
antonio.marigonda@univr.it
TEL. +39 045 8027809

Dr. Damiano Rigo
id833sck@studenti.univr.it

Esercizio 3. Indicato con $\vec{E}$ il campo elettrico nel vuoto, dalle leggi di Maxwell si ha

$$\operatorname{div}(\vec{E})(x,y,z) = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0},$$

dove $\rho(\cdot)$ indica la densità di carica e ε_0 è la costante di permeabilità elettrica del vuoto. Si calcoli il campo elettrico generato in un generico punto dello spazio da una distribuzione di carica di forma sferica, densità costante $\bar{\rho}$. Si studi il limite per $r \to 0^+$.