Esercitazione su grafici di funzioni elementari

Davide Boscaini

Queste sono le note da cui ho tratto le esercitazioni del giorno 8 Novembre 2012. Come tali sono ben lungi dall'essere esenti da errori, invito quindi chi ne trovasse a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Definizione 1. Per funzioni elementari intendiamo

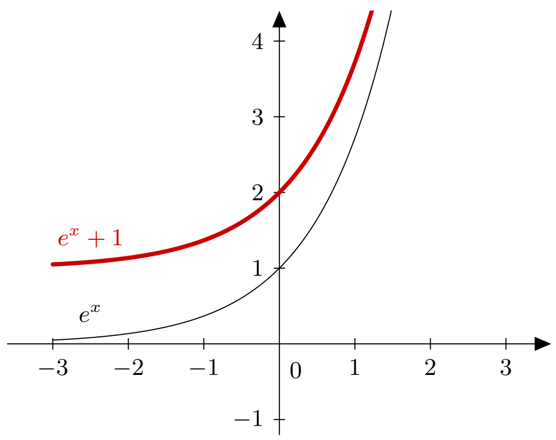
- la funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ con la sua inversa $x \mapsto \log x$;
- le funzioni goniometriche $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ e $x \mapsto \tan x$ con le rispettive inverse $x \mapsto \operatorname{arsin} x$, $x \mapsto \arccos x$ e $x \mapsto \operatorname{artan} x$;
- la funzione potenza $x \mapsto x^n$ per $n \geq 1$ intero con la funzione inversa "estrazione di radice" $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Data una funzione elementare $f(x)$ possiamo considerare la traslazione nel senso delle ordinate

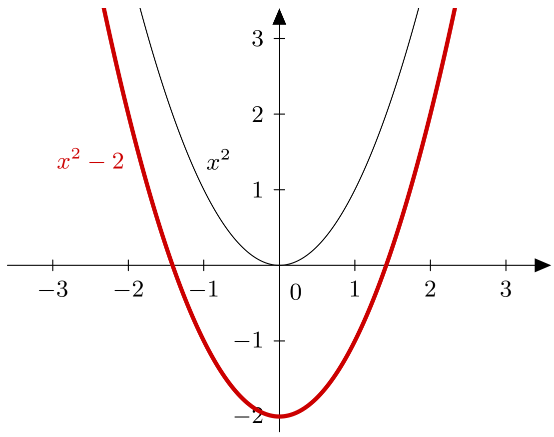
$$y = f(x) + a.$$

Se la costante a è positiva avremo una traslazione verso l'alto, se la costante a è negativa avremo una traslazione verso il basso. Ad esempio

- $y = e^x + 1$;



- $y = x^2 - 2$.

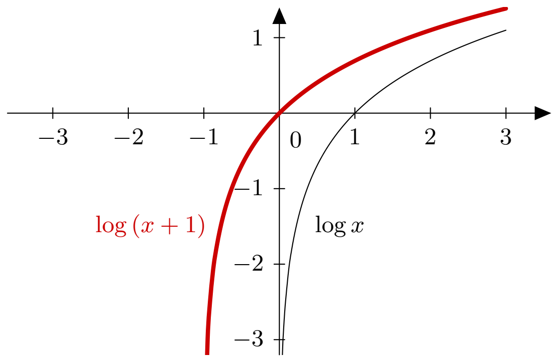


Se invece sommiamo o sottraiamo una costante alla variabile indipendente otteniamo una traslazione nel senso delle ascisse

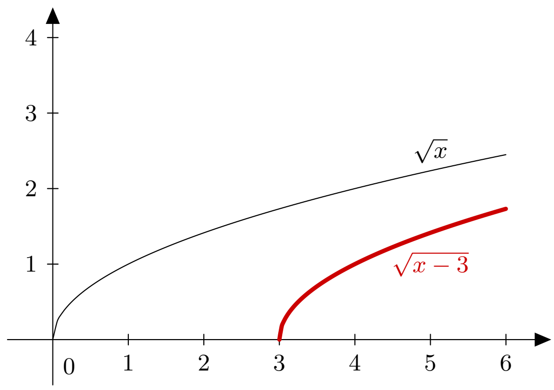
$$y = f(x + a),$$

a costante. In particolare se $a > 0$ allora avremo una traslazione verso sinistra, se $a < 0$ avremo una traslazione verso destra. Ad esempio

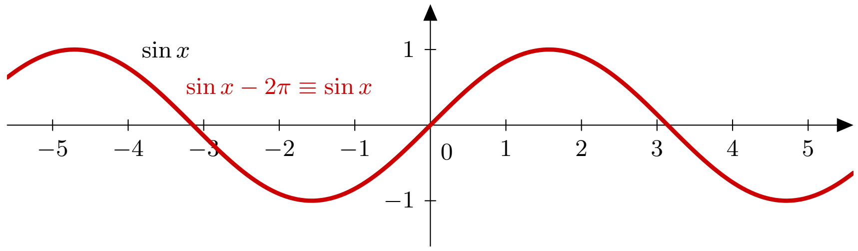
- $y = \log(x + 1)$;



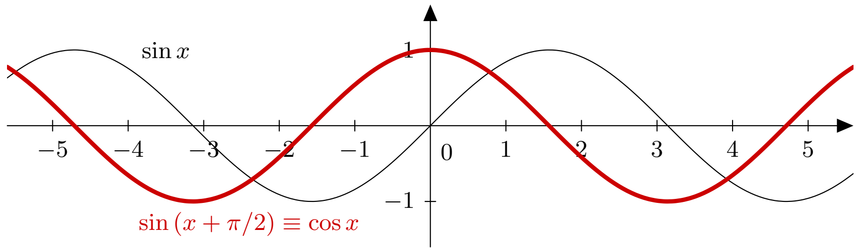
- $y = \sqrt{x - 3}$;



- $y = \sin(x - 2\pi)$, in questo caso ci aspettiamo che i grafici siano sovrapposti perché, come abbiamo visto la prima esercitazione, il seno è una funzione periodica di periodo 2π, avremo quindi $y = \sin x = \sin(x - 2\pi) = \sin(x + 2\pi)$;



- $y = \sin(x + \pi/2)$,



  dopo aver tracciato il grafico traslato ci accorgiamo di aver ottenuto esattamente il grafico della funzione coseno, abbiamo cioè trovato l'identità trigonometrica

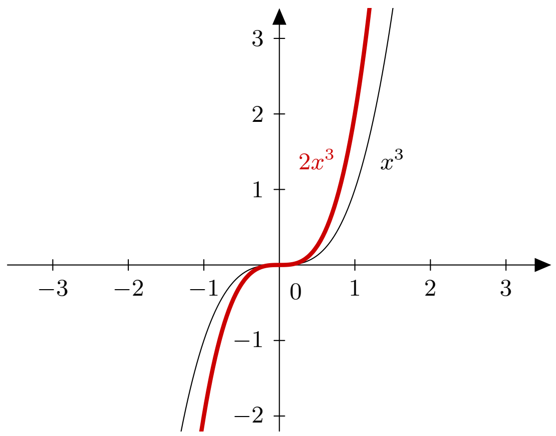
$$\sin(x + \pi/2) = \cos x.$$

Se invece consideriamo la trasformazione

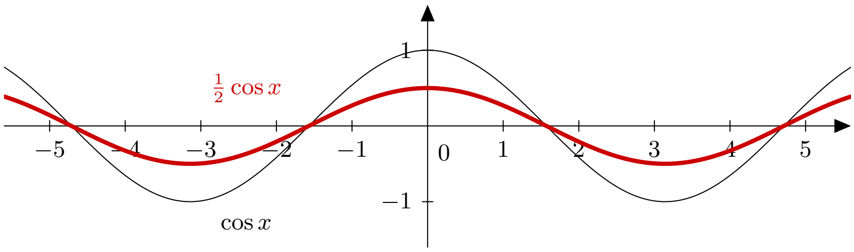
$$y = kf(x)$$

stiamo operando una dilatazione trasversale. In particolare se $k > 1$ avremo uno stiramento del grafico di $f(x)$ verso l'alto, mentre se $0 < k < 1$ il grafico si contrae. Infine se $k < 0$ abbiamo una riflessione rispetto l'asse delle ascisse più uno stiramento se $|k| > 1$ oppure più una contrazione se $|k| < 1$. Ad esempio

- $y = 2x^3$;

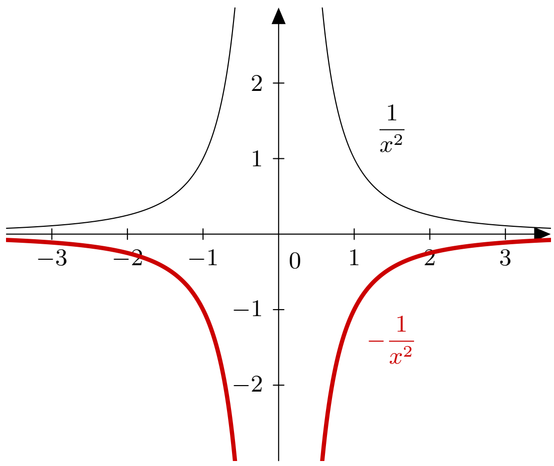


- $y = \frac{1}{2}\cos x$;

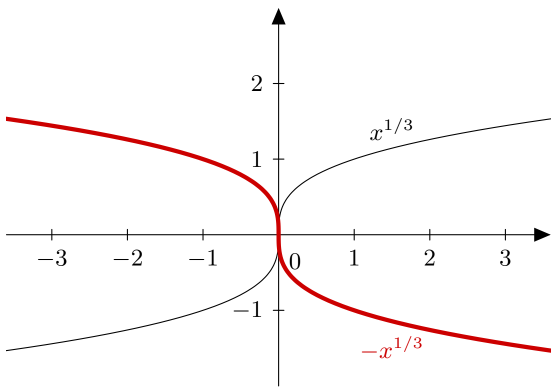


Caso particolare: se $k = -1$ stiamo facendo una simmetria rispetto all'asse delle ascisse. Ad esempio

- $y = -\dfrac{1}{x^2}$,



- $y = -\sqrt[3]{x}$,

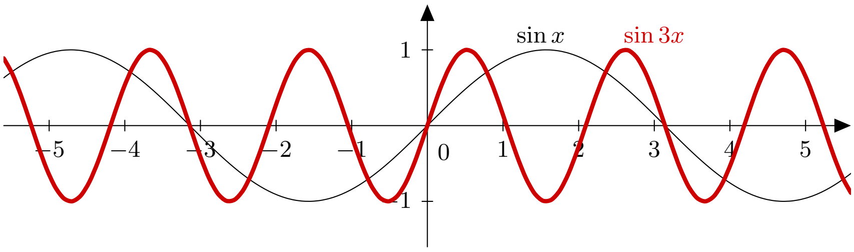


Analogamente se consideriamo la dilatazione longitudinale

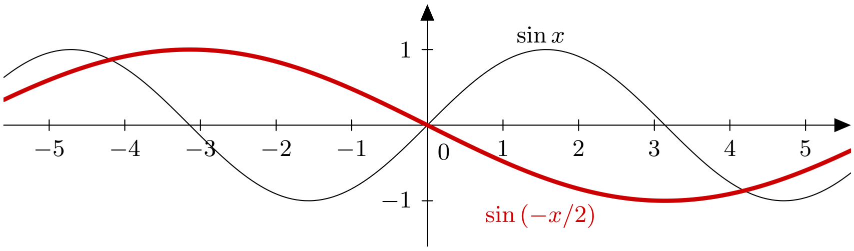
$$y = f(kx),$$

se $k > 1$ stiamo comprimendo il grafico di $f(x)$ nella direzione longitudinale mentre se $0 < k < 1$ lo stiamo rilassando. Se invece $k < 0$ si deve prima fare una riflessione attorno all'asse delle ordinate e quindi una compressione, se $|k| > 1$, o un rilassamento, se $|k| < 1$. Ad esempio

- $y = \sin(3x)$;

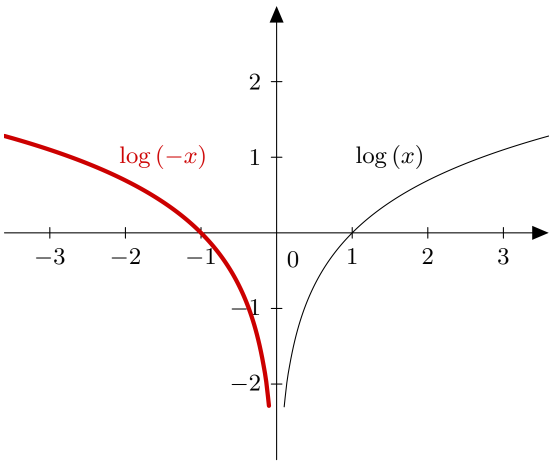


- $y = \sin(-x/2)$.



 Caso particolare: se $k = -1$ stiamo facendo una simmetria rispetto all'asse delle ordinate. Se la funzione è *pari*, allora il grafico rimane inalterato. Ad esempio

- $y = \log(-x)$.



Infine se consideriamo il valore assoluto di una certa funzione elementare $f(x)$,

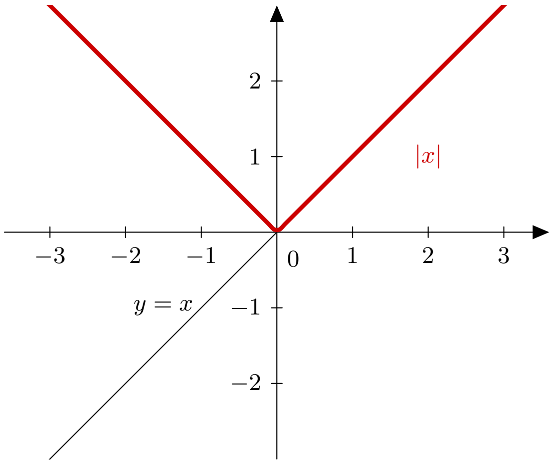
$$y = |f(x)|,$$

è definita come

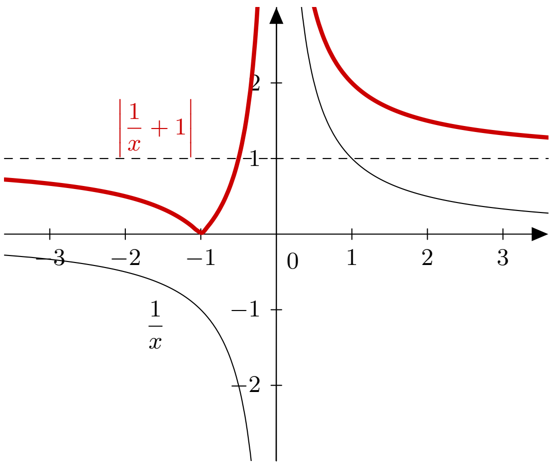
$$y = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Ad esempio,

- $y = |x|$;



- $y = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$.

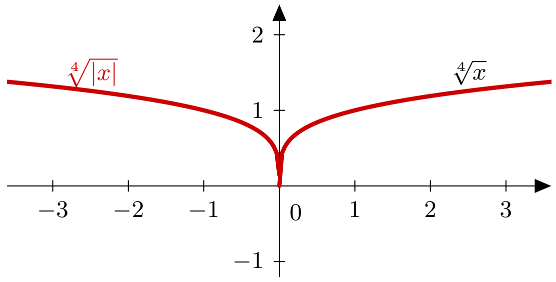


Se invece il modulo lo consideriamo sull'argomento otteniamo

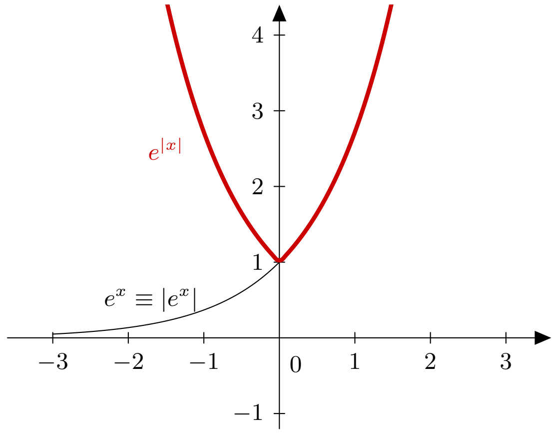
$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0, \\ f(-x) & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

cioè il grafico è inalterato nel semipiano destro, mentre nel semipiano sinistro è ottenuto tramite una simmetria rispetto all'asse y. Ad esempio,

- $y = \sqrt[4]{|x|}$,



- $y = e^{|x|}$,



In particolare osserviamo che $y = e^{|x|} \neq |e^x| = e^x$, è questo un tipico caso in cui si ha a che fare con la non commutatività della composizione di funzioni.

Esercizio 1. Dire se i grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt[6]{x^4}$ e $g(x) = (\sqrt[6]{x})^4$ sono coincidenti.

Soluzione. Studiando il dominio di f troviamo che essa è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, infatti qualsiasi numero reale si consideri, l'elevamento ad una potenza di esponente pari lo rende positivo. Al contrario l'elevazione alla quarta in $g(x)$ viene fatta successivamente all'estrazione di radice, quindi il dominio sarà composto dalle $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \geq 0$.

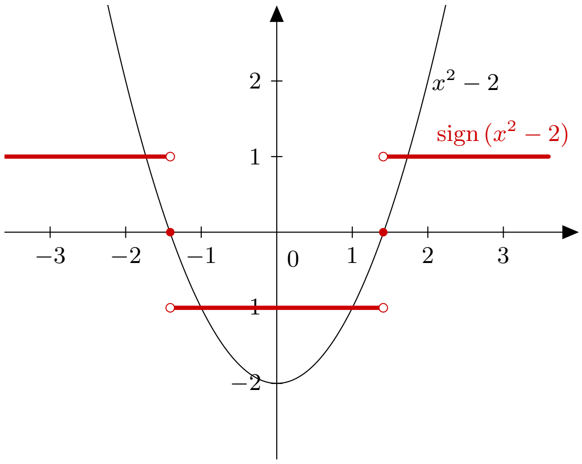
I domini sono diversi, quindi le funzioni non possono essere uguali. Tramite le regole studiate nella prima parte della lezione non è difficile disegnare i rispettivi grafici.

Consideriamo ora la funzione sign, definita come

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

e vediamo come rappresentare graficamente il grafico della funzione

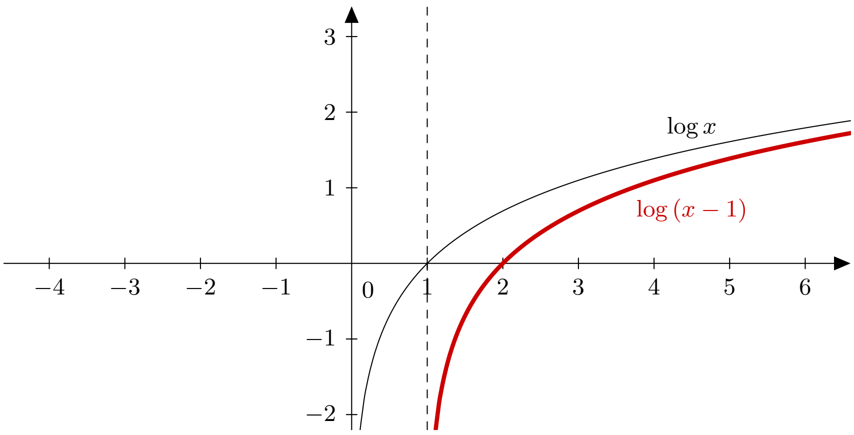
- $y = \text{sign}\,(x^2 - 2)$,



Esercizio 2. A partire dal grafico di $f(x) = \log x$ ricavare quello di

$$y = |2 \log|x - 1||.$$

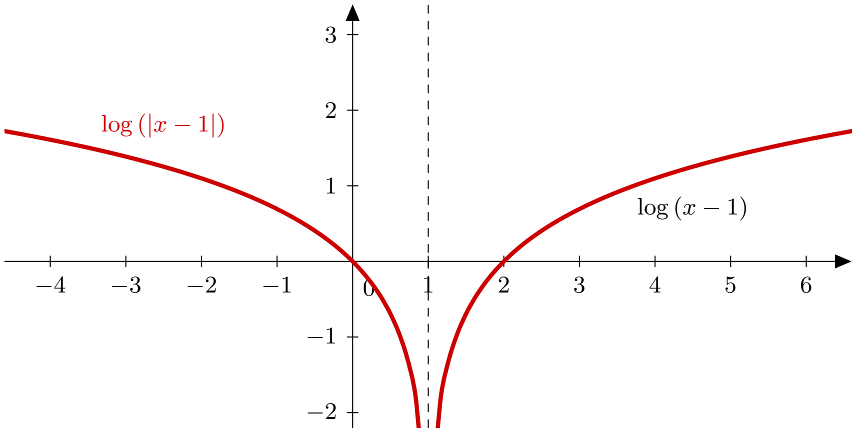
Soluzione. Per prima cosa tracciamo il grafico del logaritmo e da questo ricaviamo quello di $y = \log(x - 1)$ traslandolo verso destra di un'unità:



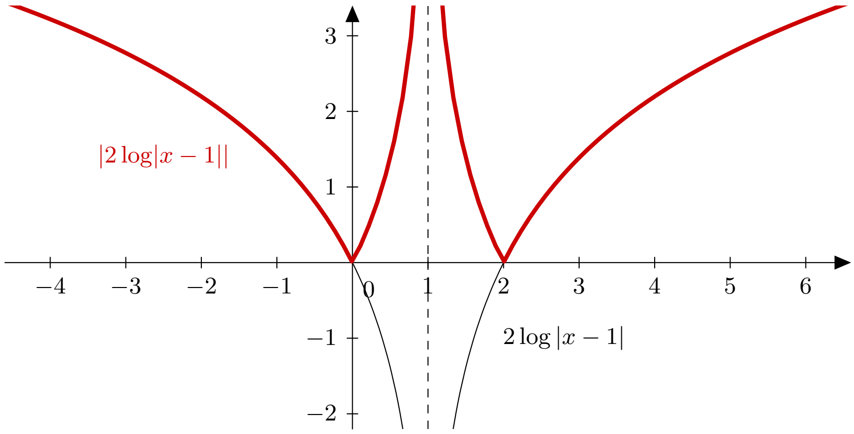
A questo punto dobbiamo ricavare il grafico di $y = \log(|x - 1|)$ a partire da quello del logaritmo traslato. Per quanto abbiamo visto precedentemente

$$y = \begin{cases} \log(x-1) \text{ se } x > 1, \\ \log(-(x-1)) = \log(1-x) \text{ se } x < 1, \end{cases}$$

quindi nel semipiano $x > 1$ il grafico rimane inalterato, mentre nel semipiano $x < 1$ dobbiamo rappresentare la funzione $\log(1 - x)$. Abbiamo visto prima che $\log(-x)$ si ottiene facendo il simmetrico di $\log x$ rispetto all'asse delle ordinate, a questo punto $\log(-x + 1)$ si ottiene spostando verso destra di un'unità quanto trovato. In conclusione il grafico cercato si ottiene per simmetria di $\log(x - 1)$ rispetto alla retta di equazione $x = 1$, come mostrato in figura.



Infine rimane solo da dilatare il grafico longitudinalmente e "ribaltare" verso l'alto i tratti di curva che hanno ordinate negative tramite una simmetria rispetto l'asse delle ascisse, in questo modo si ottiene il grafico cercato.



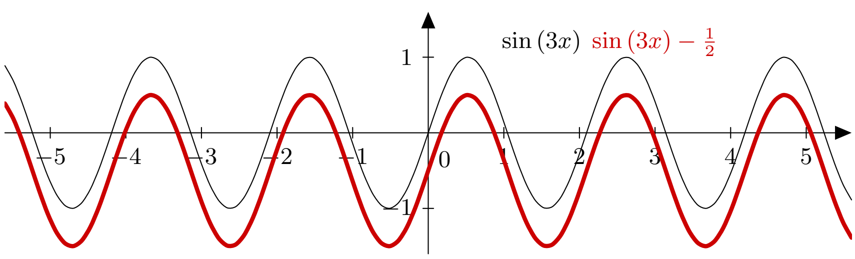
Esercizio 3. A partire dal grafico di $f(x) = \sin x$ ricavare quello di

$$y = |2\sin(3x) - 1|.$$

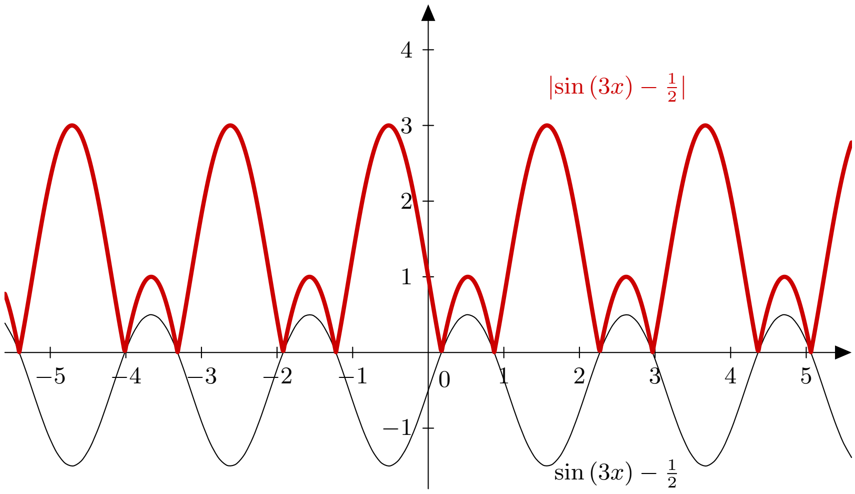
Soluzione. Per prima cosa raccogliamo il coefficiente 2 all'interno del modulo ottenendo

$$y = |2(\sin(3x) - 1/2)| = 2|\sin(3x) - 1/2|.$$

Abbiamo già visto come arrivare al grafico di $y = \sin(3x)$ partendo da quello di $\sin x$. Trasliamo quindi ora il grafico di $y = \sin(3x)$ verso il basso di $1/2$, ottenendo



A questo punto il modulo "ribalta" verso l'alto i tratti di curva che hanno ordinate negative tramite una simmetria rispetto all'asse delle ascisse. Infine la costante di moltiplicazione 2 dilata quanto ottenuto trasversalmente, come si può osservare nella seguente figura

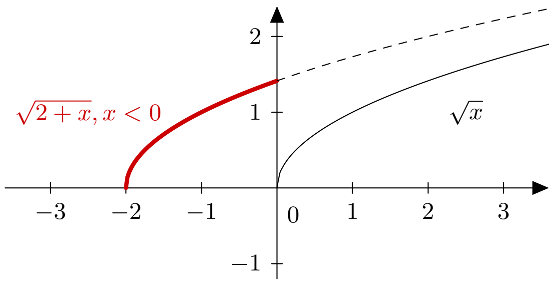


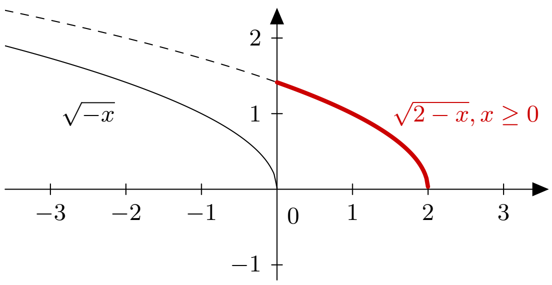
Esercizio 4. A partire dal grafico di $f(x) = \sqrt{x}$ ricavare quello di

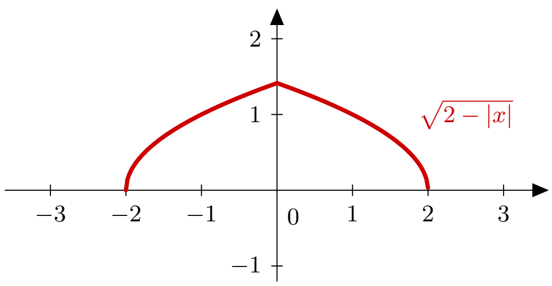
$$y = |3\sqrt{2 - |x|} - 2|.$$

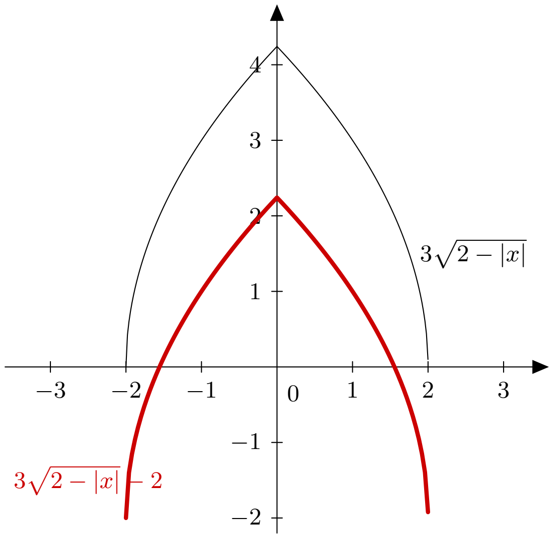
Soluzione. Per prima cosa possiamo scrivere $\sqrt{2 - |x|}$ come

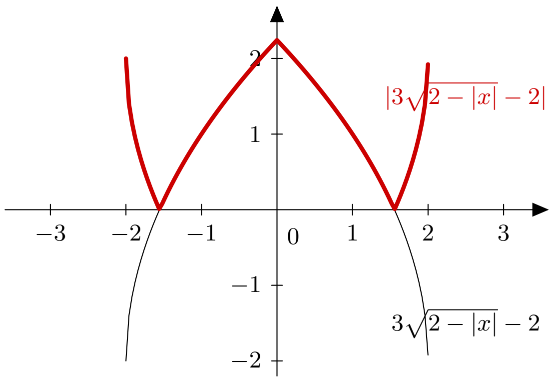
$$\sqrt{2 - |x|} = \begin{cases} \sqrt{2 - x} \text{ se } x \geq 0, \\ \sqrt{2 + x} \text{ se } x < 0. \end{cases}$$








$3\sqrt{2-|x|}$
$3\sqrt{2-|x|}-2$


$|3\sqrt{2-|x|}-2|$
$3\sqrt{2-|x|}-2$