Calcolo Numerico
Corso di Laurea in Informatica
Preappello del 28/05/2014 (durata due ore) – Tema 1

MAT.	COGNOME	NOME

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

Per ogni quesito, indicare la casella che ha la miglior risposta. Ogni risposta corretta vale 1 punto, errata o non data 0 punti.

1. La precisione di macchina `eps` del sistema floating point $\mathbb{F}(10, 3, -2, 2)$ è

   ☐ $5 \cdot 10^{-3}$ ☐ 10^{-3} ☐ $5 \cdot 10^{-4}$ ☐ 10^{-4}

2. La radice $\xi = 3$ dell'equazione $x^2 - 9 = 0$ viene approssimata con il metodo di bisezione partendo dall'intervallo $[a_0,\ b_0] = [1,\ 4]$. Ricordando che $x_k = (a_k + b_k)/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, il valore assoluto dell'errore $e_2 = \xi - x_2$ della seconda iterata x_2 è pari a

   ☐ 0 ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$

3. La funzione $f(x) = e^x + x^2 - 2$ ha due radici, una positiva e l'altra negativa. Sia ξ la radice **positiva**. Volendo approssimare ξ col metodo di Newton, ci si aspetta che il suo ordine di convergenza sia pari a

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ non è determinabile perché non si conosce ξ

4. Sia ξ il punto fisso del metodo iterativo $x_{k+1} = \sqrt{x_k + 2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Posto $x_0 = 7$, ricordando che l'errore associata all'iterata x_k è $e_k = \xi - x_k$, il valore assoluto dell'errore e_1 della prima iterata x_1 è

   ☐ 1 ☐ $\sqrt{5} - 2$ ☐ $\sqrt{5}$ ☐ nessuna delle risposte date

5. Si devono risolvere $m \gg 1$ sistemi lineari del tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$, $k = 1, \ldots, m$ con A matrice quadrata di ordine n. Supponendo di avere già a disposizione la fattorizzazione LU della matrice A (ossia, sono note le matrici L ed U tali che $L \cdot U = A$), quale è, all'incirca, il numero di operazioni aritmetiche necessarie per risolvere tutti gli m sistemi lineari?

   ☐ n^2 ☐ mn^2 ☐ $2n^2$ ☐ $2mn^2$

6. Il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = E\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$, $k = 0, 1, \ldots$ con

   $$E = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

   viene utilizzato per risolvere un certo sistema lineare di ordine $n = 3$. Allora, almeno per k abbastanza grandi, ci si aspetta che il rapporto tra le norme Euclidee di due errori consecutivi $||\mathbf{e}^{(k+1)}||_2/||\mathbf{e}^{(k)}||_2$ sia all'incirca

   ☐ $1/5$ ☐ $1/4$ ☐ $1/3$ ☐ il metodo non converge

7. Siano

$$L_i^{(2)}(x) = \frac{\prod_{r=0,r\neq i}^{2}(x-x_r)}{\prod_{r=0,r\neq i}^{2}(x_i-x_r)}, \quad i=0,1,2$$

i tre polinomi di Lagrange associati ai nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Allora il polinomio P definito dall'espressione

$$P(x) = L_1^{(2)}(x) + \sum_{i=0}^{2} L_i^{(2)}(x)$$

è uguale a

☐ $1 - x^2$ ☐ $2 - x^2$ ☐ $-x^2$ ☐ $(1-x^2)(4-x^2)$

8. Siano dati la funzione $f(x) = x^3 - 2x + 2$ ed i nodi equispaziati $x_k = x_0 + k \cdot h$, $k = 0, \ldots, 4$ con $x_0 = -1$ e $h = 1$. Allora, la quantità q data da

$$q = (\, f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] + f[x_0,x_1,x_2] - f[x_4,x_3,x_2,x_1,x_0] \,)^3$$

è pari a ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

9. Il polinomio di grado $n = 1$ che approssima ai minimi quadrati i dati $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,2)$ è

☐ $\frac{x}{2} + 1$ ☐ $2x + 1$ ☐ $x + \frac{1}{2}$ ☐ nessuna delle risposte è corretta

10. Il metodo dei trapezi per approssimare l'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx$$

con $m = 2$ intervalli dà ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

11. L'istruzione Matlab

```
(1:2:6).*(0:2)
```

produce ☐ un errore ☐ [0 3 10] ☐ 13 ☐ una matrice 3×2

12. Le istruzioni Matlab

```
A = ones(3);
A(3,2) = length( A(2,:) );
```

producono

☐ un errore ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

13. Le istruzioni Matlab

```
f = inline('2*x.^2');
a = 1;
while( a < 7 )
    a = f(a)
end
```

stampano a video

☐ 2 e 4 ☐ 2 e 8 ☐ $a = f(a), a = f(a)$ ☐ non stampano nulla

14. Sia $\mathbf{e} = [\mathbf{e}(1), \ldots, \mathbf{e}(n)]$ un vettore di lunghezza n che rappresenta gli errori di un certo metodo iterativo in funzione delle iterate k. Quale delle seguenti istruzioni Matlab permette di disegnare il grafico di $\log_{10}(|\mathbf{e}|)$ in funzione della posizione k (ossia, la scale delle ordinate è logaritmica e quella delle ascisse è lineare)?

   ☐ plot(e) ☐ plot(abs(e)) ☐ semilogy(abs(e)) ☐ loglog(abs(e))

15. (2 punti) Indicare quali delle seguenti istruzioni Matlab utilizzate per definire una function di nome pippo è corretta, barrando la casella OK e quale non lo è barrando la casella NO

   ☐ OK ☐ NO function z = pippo(x,y)
   ☐ OK ☐ NO function [z,w] = pippo(x,y)
   ☐ OK ☐ NO function (z,w) = pippo[x,y]
   ☐ OK ☐ NO function x = pippo(x)

DOMANDA TEORICA (max 3 punti)

Definire il numero di condizionamento $K(A)$ di una matrice quadrata A avendo cura di considerare anche il caso di A singolare. Dimostrare che $K(A) \geq 1$ per ogni matrice non singolare A e proporre un esempio di matrice di ordine 2 con $K_2(A) = 10^3$.

Esercizi

Rispondere in modo sintetico ed esauriente nello spazio sottostante ciascun esercizio.

Esercizio 1 (5 punti) Si consideri la funzione $f(x) = (x-1)^4$ che ha come unica radice reale $\xi = 1$ con molteplicità $\mu = 4$.

(a) Scrivere esplicitamente l'iterazione di Newton che lega x_{k+1} ad x_k e, assunto il punto iniziale $x_0 = 4$, calcolare le prime due iterate, x_1 ed x_2.

(b) Ricordando che l'errore al passo k-esimo è definito da $e_k = \xi - x_k$, calcolare $|e_{k+1}|/|e_k|$ per il metodo di Newton e, dall'espressione trovata, dedurre sia l'ordine del metodo che la costante asintotica dell'errore. Tracciare anche un grafico qualitativamente corretto che riporti $\log_{10}(|e_k|)$ in funzione di k.

(c) Proporre un metodo di ordine almeno 2 per approssimare la radice ξ.

(d) (facoltativo) Trovare il legame tra l'errore e_k e lo scarto $x_{k+1} - x_k$ per il metodo di Newton.

Esercizio 2 (5 punti) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{che ha soluzione esatta } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Solo guardando la matrice A, dire perché i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti.

(b) Scrivere, componente per componente, le equazioni di aggiornamento del metodo iterativo di Gauss-Seidel ed utilizzarle per calcolare $\mathbf{x}^{(1)}$ a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$.

(c) Detti ρ_J e ρ_{GS} i raggi spettrali delle matrici di iterazione di Jacobi e Gauss-Seidel rispettivamente, è vero che $\rho_J \cdot \rho_{GS} < 1$? Giustificare accuratamente la propria risposta.

(d) (*facoltativo*) Cosa si può dire, invece, di ρ_{GS}/ρ_J^2?

Esercizio 3 (4 punti) Ricordando che l'errore $E_{T,C}^{(m)}$ che si commette applicando il metodo dei trapezi composto con m intervalli per il calcolo dell'integrale definito

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

è esprimibile come

$$E_{T,C}^{(m)} = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi)$$

dove ξ è un opportuno punto dell'intervallo [a, b], calcolare il numero di intervalli m che assicura il calcolo di

$$\int_1^2 \ln(x)dx$$

con un valore assoluto dell'errore inferiore a 10^{-4} (ossia, $\left| E_{T,C}^{(m)} \right| < 10^{-4}$).