

Esercizi Moto rotazionale

Moto traslatorio		Moto rotatorio	
spostamento lineare	Δx	spostamento angolare	$\Delta \varphi$
velocità traslatoria	$v = \Delta x / \Delta t$	velocità angolare	$\omega = \Delta \varphi / \Delta t$
accelerazione traslatoria	$a = \Delta v / \Delta t$	accelerazione angolare	$\alpha = \Delta \omega / \Delta t$
causa del moto: la forza	F	causa del moto: il momento di una forza $M = F \cdot l$	
coefficiente d'inerzia: la massa	m	coefficiente d'inerzia: il momento d'inerzia I	
legge del moto:	$a = F / m$	legge del moto:	$\alpha = M / I$
energia cinetica traslatoria	$K_t = 1/2 m v^2$	energia cinetica rotazionale:	$K_r = 1/2 I \omega^2$

lineare

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$v = \frac{v+v_0}{2}$$

angolare

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

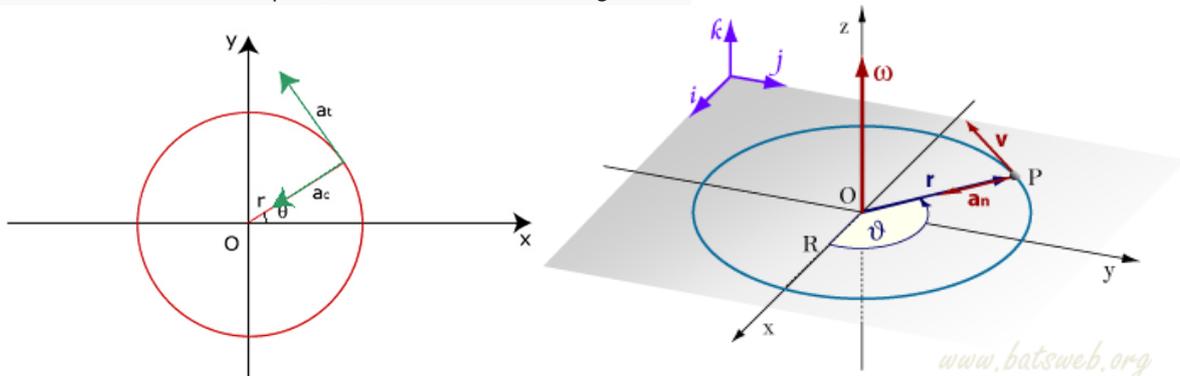
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega+\omega_0}{2}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{o} \quad T = \frac{1}{f} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Componenti dell'accelerazione del moto circolare generico:

\mathbf{a}_c = accelerazione centripeta; \mathbf{a}_t = accelerazione tangenziale



Nel caso di moto circolare uniforme la velocità angolare $\omega = \text{costante}$, e quindi l'accelerazione angolare $\alpha = 0$, per cui l'accelerazione si riduce alla sola componente centripeta

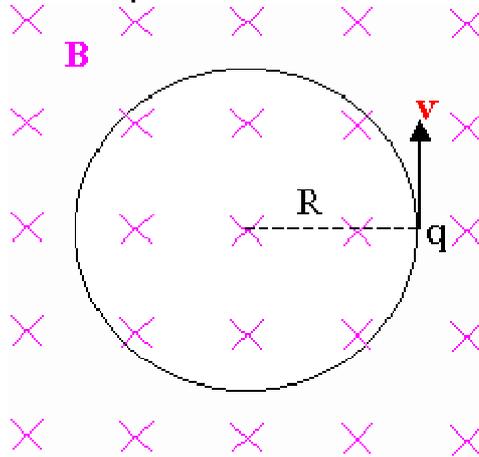
$$|\mathbf{a}_c| = \omega^2 r = \omega v = \frac{v^2}{r}$$

Nel moto circolare uniforme che la velocità lineare \mathbf{v} è legata alla velocità angolare ω dalla relazione:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \left(\frac{2\pi}{T} \right) r = \omega r \quad \Rightarrow \quad v = \omega r.$$

1. Una particella è in moto in un campo magnetico; sapendo che descrive una circonferenza di raggio pari a 3,4 cm e che il modulo (costante) della velocità è 8×10^6 m/s, determinare: a) la frequenza; b) il modulo dell'accelerazione della particella.



Soluzione:

- a) Determiniamo il periodo:

$$T = 2\pi R / v$$

$$T = (2 \times 3,1416 \times 0,034 \text{ m}) / (8 \times 10^6 \text{ m/s})$$

$$T = 2,67 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Quindi la frequenza sarà:

$$f = 1 / T$$

$$f = 1 / 2,67 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$f = 3,74 \times 10^7 \text{ Hz}$$

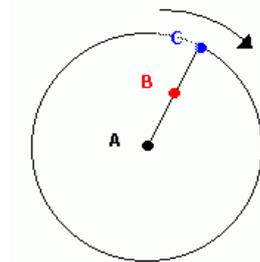
- b) Calcoliamo l'accelerazione della particella

$$|a_c| = v^2 / R$$

$$|a_c| = (8 \times 10^6 \text{ m/s})^2 / 0,034 \text{ m}$$

$$|a_c| = 1,88 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$$

2. Quale velocità angolare in RPM (Rivoluzioni Per Minuto) deve ruotare una centrifuga se una particella a 10 cm dall'asse di rotazione deve subire un'accelerazione di modulo pari a 800 m/s^2 ?



Soluzione:

L'accelerazione di 800 m/s^2 corrisponde all'accelerazione centripeta, la centrifuga girerà a una velocità costante, quindi:

$$a_c = \omega^2 R$$

$$\omega = \sqrt{(a_c / R)}$$

$$\omega = \sqrt{(800 / 0,1)} \text{ rad/s}$$

$$\omega = 89,44 \text{ rad/s}$$

Conversione a RPM

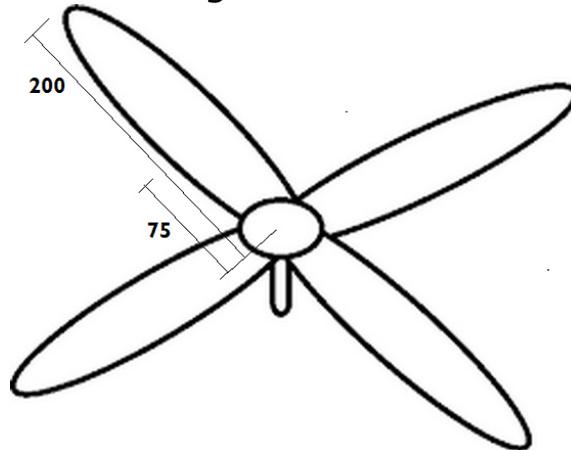
$$1 \text{ rpm} = 1 \text{ min}^{-1}$$

$$1 \text{ rpm} = 1/60 \text{ Hz}$$

$$\# \text{rpm} = \omega \times 60/2\pi$$

$$\# \text{rpm} = 89,44 \times 60/2\pi = 854 \text{ rpm oppure } 854 \text{ giri per minuto}$$

3. Le pale di un'elica sono lunghe 200 cm ciascuna. Sapendo che il modulo della velocità agli estremi di una pala è 250 m/s , determinare: a) la velocità di un punto che si trova a 75 cm dall'asse di rotazione; b) la velocità angolare; c) a quanti giri per minuto gira l'elica.



Soluzione:

- a) La velocità di un punto che si trova a $0,75 \text{ m}$ è:

$$v = (0,75 / 2,00) \times 250 \text{ m/s} = 93,75 \text{ m/s}$$

- b) Quindi la velocità angolare sarà:

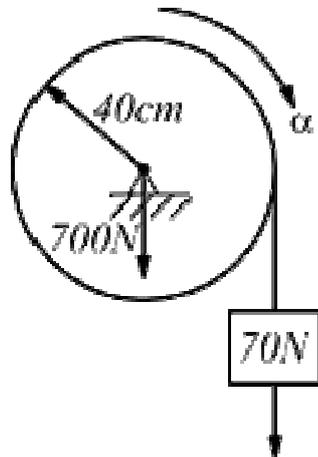
$$v = \omega R \rightarrow \omega = v / R \rightarrow \omega = 125 \text{ rad/s.}$$

- c) Il numero di giri per minuto è uguale a i rpm, quindi:

$$\# \text{rpm} = \omega \times 60/2\pi$$

$$\# \text{rpm} = 125 \times 60/2\pi = 1.193,66 \text{ rpm}$$

4. (**Esame Settembre 2014**) Una puleggia di raggio $R=40\text{cm}$ del peso di 700N ruota partendo da ferma sotto l'azione di un peso (una massa) di 70N sostenuta da una fune avvolta sulla puleggia. Quale sarà la velocità angolare di quest'ultima 2 secondi dopo la partenza.



Soluzione:

La velocità angolare è data da:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\omega_0 = 0$$

$$t = 2 \text{ sec}$$

Quindi dobbiamo solo calcolare l'accelerazione angolare α :

$$M = I \cdot \alpha$$

Dove:

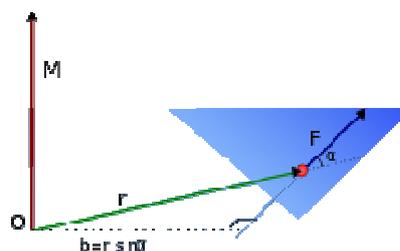
M = Momento di una forza (equivalente a F in $F = m \cdot a$)

I = Momento d'inerzia (equivalente a m in $F = m \cdot a$)

α = Accelerazione angolare (equivalente a a in $F = m \cdot a$)

Calcoliamo il momento della forza:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



Il modulo del momento sarà:

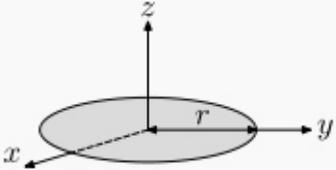
$$|M| = |r| \cdot |F| \cdot \sin(\alpha)$$

dove α è l'angolo da non confondere con l'accelerazione angolare.

Nel nostro caso, quindi:

$$M = |0,4| \cdot |70| \cdot \sin(90^\circ) = 28 \text{ Nm}$$

Calcoliamo il momento d'inerzia:

Descrizione	Figura	Momento di inerzia
Disco solido e sottile, di raggio r e massa m		$I_z = \frac{mr^2}{2}$ $I_x = I_y = \frac{mr^2}{4}$

Nel nostro caso:

$$I = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

$$I = \frac{1}{2} (700/9,8) \cdot (0,4)^2 = 5,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

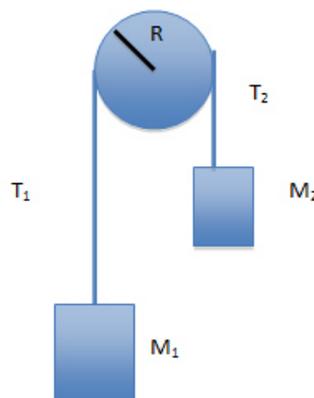
Calcoliamo l'accelerazione angolare:

$$\alpha = M/I = 28 / 5,7 = 4,9 \text{ rad/s}^2$$

La velocità angolare sarà quindi:

$$\omega = \alpha \cdot t = 4,9 \cdot 2 = 9,8 \text{ rad/s}$$

5. (**Esame Settembre 2014**) Un filo attaccato ad una ruota di raggio $R=0,05\text{m}$ ha ai suoi capi due masse $M_1=0,55 \text{ Kg}$ e $M_2=0,45 \text{ Kg}$. Il sistema si muove (con la massa M_1 che cade verso il basso) con una velocità per cui percorre $0,9 \text{ m}$ in 4 secondi. Calcolare il momento di inerzia del disco.



Soluzione:

$$\text{Da } M = I \cdot \alpha \rightarrow I = M/\alpha$$

Calcoliamo il modulo del momento della forza:

La forza totale che agisce sul sistema è $F = -M_1 \cdot g + M_2 \cdot g$

$\theta = 90^\circ$ che è l'angolo formato tra la forza e il raggio

$$M = |R| \cdot |F| \cdot \sin(\theta)$$

Quindi:

$$M = |0,05| \cdot |-(0,55) \cdot (9,8) + (0,45) \cdot (9,8)| \cdot \sin(90^\circ)$$

$$M = (0,05) \cdot (-0,98) = 0,049 \text{ Nm}$$

Calcoliamo l'accelerazione angolare:

La velocità angolare è:

$$\omega = v / R$$

$$v = 0,9 \text{ m} / 4 \text{ sec} = 0,225 \text{ m/s}$$

$$\omega = 0,225 / 0,05 = 4,5 \text{ rad/s}$$

L'accelerazione angolare sarà:

$$\alpha = \omega / t$$

$$\alpha = 4,5 / 4 = 1,125 \text{ rad/s}^2$$

Quindi il momento d'inerzia sarà:

$$I = M/\alpha$$

$$I = 0,049 / 1,125$$

$$I = 0,043556 \text{ kg.m}^2$$