Dinamica del punto materiale: lavoro e energia.

Problema n. 1: Un'automobile, assimilabile a un corpo puntiforme, si muove lungo un piano orizzontale sotto l'azione: i) della forza di un motore che eroga una potenza costante di 10 kW; ii) dell'attrito cinematico radente con coefficiente di attrito $\mu_d = 0.1$; iii) della forza peso e della corrispondente reazione vincolare del piano orizzontale. In queste condizioni il corpo si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante di modulo $v_0 = 50$ m/s. Determinare:

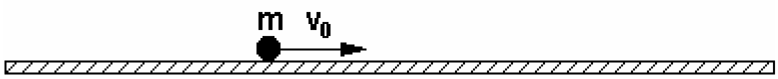
(a) la forza che il motore esercita sul corpo puntiforme; [$F_0 = P/v_0 = 200$ N]

(b) la massa del corpo; [$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_0+\mathbf{F}_A = 0$; $F_0 - \mu_d\, mg = 0$; $m = F_0/(\mu_d g) = 204.08$ kg]

Assumendo che al tempo t=0 il motore venga spento, si calcoli:

(c) la lunghezza del tratto rettilineo che il punto percorre prima di fermarsi; [$W' = E_{k,f} - E_{k,0}$; $-\mu_d\, mgd = -E_{k,0}$; $d = E_{k,0}/(\mu_d\, mg) = 1275.51$ m]

(d) il tempo impiegato dal corpo puntiforme a fermarsi. [$t_f = \sqrt{2d/(\mu_d g)} = 51.02$ s]



Problema n. 2: Un'automobile, assimilabile a un corpo puntiforme, si muove di moto rettilineo con velocità costante di modulo $v_0 = 20$ m/s in salita lungo una strada inclinata di $\alpha = 16.5°$ rispetto al piano orizzontale. Il corpo si muove sotto l'azione delle seguenti forze:

1) forza di un motore che eroga una potenza costante di 25 kW;

2) sua forza peso e corrispondente reazione vincolare del piano inclinato;

3) forza d'attrito cinematico radente, caratterizzata da un coefficiente di attrito $\mu_d = 0.2$.

Determinare:

(a) la forza che il motore esercita sull'automobile;

(b) la massa dell'automobile.

Supponendo che a un certo istante di tempo (t=0) il motore venga spento, si calcoli:

(c) la lunghezza del tratto rettilineo che l'automobile percorre lungo la salita prima di fermarsi;

(d) la velocità con cui ripassa dalla posizione occupata all'istante t = 0, durante il successivo moto di discesa (si supponga che il coefficiente di attrito statico sia = 0.25).

Problema n. 3: Un cane tira una slitta di massa m = 60 kg lungo una strada ghiacciata inclinata di un angolo di $\alpha = 10°$ sull'orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico fra la slitta e la strada è $\mu_d = 0.1$. Assumendo che il cane tiri la slitta parallelamente alla superficie della strada sviluppando una potenza costante di 80 W, determinare:

(a) la velocità della slitta; [v = 0.5 m/s]

(b) la frazione di potenza sviluppata dal cane che viene spesa per vincere l'attrito; [$P_a = 36.2\%$]

(c) la frazione di potenza che viene spesa per compiere lavoro contro la forza di gravità; [Pg = 63.8%]

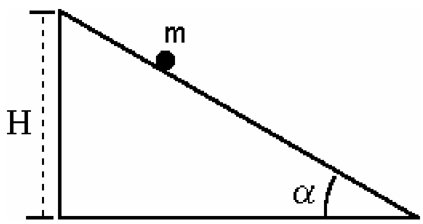
(d) il lavoro fatto dal cane per spostare la slitta di 25 m lungo la strada in salita. [$W = P\,\Delta t = 4\times10^3$ J]

Problema n. 4: Un corpo puntiforme di massa m = 5 kg viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla lungo un piano inclinato di $\alpha = 30°$ sul piano orizzontale da un'altezza H=2 m rispetto a questo piano. Il corpo striscia lungo il piano inclinato con coefficiente d'attrito dinamico μ_d=0.2, fino a raggiungere la base del piano stesso. Calcolare:

(a) il lavoro della risultante delle forze agenti sul corpo dopo che il corpo ha raggiunto la base del piano inclinato; [$W_T = mgH - \mu_d\, mg \cos\alpha\, H/\sin\alpha = 64.05$ J]

(b) la velocità con cui il corpo arriva alla base del piano inclinato; [$v_B = \sqrt{2 W_T/m} = 5.06$ m/s]

(c) il tempo impiegato dal corpo per raggiungerla. [$t = \sqrt{2 L/a} = \sqrt{4H/g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)} = 1.58$ s]



Problema n. 5: Un corpo di massa m è appoggiato su un piano inclinato di angolo $\alpha = 30°$. Il corpo, inizialmente in quiete ad un'altezza H = 1.5 m rispetto al piano orizzontale, è lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Il coefficiente di attrito statico è noto e pari a $\mu_S = 0.4$, mentre quello cinematico è $\mu_d = 0.25$ sia sul piano inclinato che sul piano orizzontale. Determinare:

a) con quale velocità v_1 il corpo arriva alla base del piano inclinato;
b) la distanza *d* percorsa dal corpo sul piano orizzontale prima di arrestarsi.

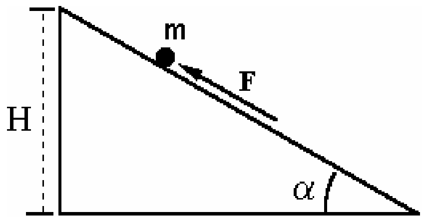
Nota Bene: Si assuma che il raccordo tra piano inclinato e piano orizzontale avvenga mediante un breve profilo curvo privo di spigoli.

Problema n. 6: Un blocco di massa m = 80 kg, sta scivolando lungo un piano inclinato formante un angolo $\alpha = 30°$ con il piano orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e il piano è $\mu_d = 0.2$. Una forza **F** parallela alla superficie del piano inclinato spinge il blocco in modo da farlo scendere lungo il piano stesso con velocità costante di modulo pari a v =1.25 ms^{-1}. Determinare:

(a) l'intensità e il verso della forza F; [$\mathbf{F} = -256.47$ N $\mathbf{i}$]
(b) la potenza dissipata dalla forza di attrito; [$P = \mathbf{F}_A \bullet \mathbf{v} = -\mu_d\, mg \cos\alpha\, v = -169.91$ W]
(c) la potenza sviluppata dalla forza peso. [$P = m\mathbf{g}\bullet\mathbf{v} = mg \sin\alpha\, v = 490.5$ W]

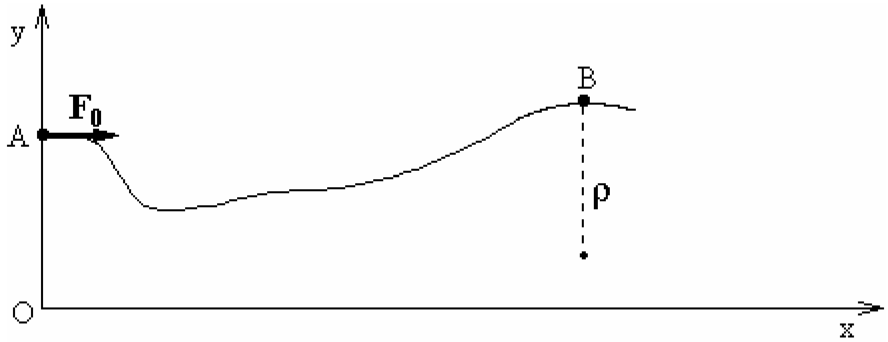
Assumendo che all'istante t=0 il blocco si trovi ad un'altezza H = 10 m dal suolo, calcolare, con riferimento all'istante in cui il blocco raggiunge la base del piano inclinato:

(d) il lavoro fatto dalla forza F; [$W_{\mathbf{F}} = -F L = -5129.4$ J]
(e) il lavoro fatto dalla forza di gravità; [$W_{\mathbf{mg}} = mg H = +7848$ J]
(f) il lavoro fatto dalla reazione vincolare della superficie del piano inclinato; $W' = -\mu_d\, mg \cos\alpha\, (H/\sin\alpha) = +2718.6$ J]
(g) la variazione di energia meccanica del blocco. [$\Delta E_M = E_{M,f} - E_{M,0} = (½)\, mv^2 - [(½)\, mv^2 + mg H] = -mgH = -7848$ J]



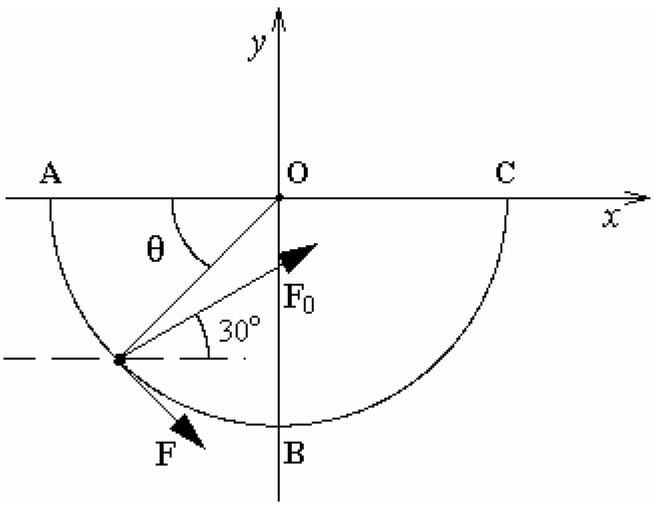
Problema n. 7: Un corpo puntiforme di massa m = 5 kg si muove nel piano verticale Oxy lungo la guida curvilinea perfettamente liscia (vincolo bilaterale) rappresentata in figura. Il corpo è soggetto anche all'azione una forza costante, di intensità $F_0 = 15$ N e diretta orizzontalmente. All'istante t = 0 il corpo si trova nella posizione A, di ascissa $x_A = 0$ e l'altezza rispetto al suolo $y_A = 1.6$ m. Dopo un certo tempo il corpo raggiunge la posizione B di ascissa $x_B = 3.2$ m e altezza dal suolo $y_B = 2.0$ m. Determinare:

(a) il diagramma delle forze agenti all'istante t = 0, dandone una rappresentazione grafica; [$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{W}+\mathbf{N}+\mathbf{F}_0$]
(b) il lavoro della risultante delle forze agenti nello spostamento da A a B; [$W_{AB}{}^T = \sum_i W_{AB,i} = F_0 (x_B - x_A) - mg\, (y_B - y_A) = 28.4$ J]
(c) il modulo della velocità nel punto B, nell'ipotesi che la velocità all'istante t = 0 sia $\mathbf{v}_0 = 0.63$ m/s $\mathbf{i}$; [$v_B = \sqrt{(v_A{}^2 + 2W_{AB}{}^T/m)} = 3.43$ m/s]
(d) la reazione **R** della guida nel punto B, nell'ipotesi che il raggio di curvatura della guida nel punto B sia $\rho = 1.6$ m. [$\mathbf{R}_B = m(g - v_B{}^2/\rho)\, \mathbf{j} = 12.235$ N $\mathbf{j}$]



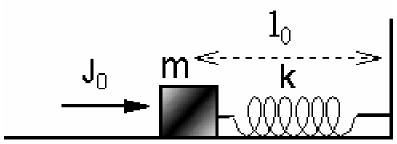
Problema n. 8 : Un carrello di massa m = 5 kg, assimilabile a un corpo puntiforme, si muove lungo una rotaia semicircolare liscia di raggio R = 4 m che giace su un piano orizzontale xy. Il corpo si muove sotto l'azione simultanea di due forze **F** e $\mathbf{F}_0$ di modulo rispettivamente 40 N e 75 N. La forza **F** è sempre tangente al profilo circolare della rotaia, mentre la forza $\mathbf{F}_0$ agisce in direzione fissa, e forma un angolo $\alpha = 30°$ con l'asse x (v. figura). Calcolare:

(a) Le componenti cartesiane della risultante **R** delle due forze **F** e $\mathbf{F}_0$, in funzione della coordinata angolare θ, che individua la posizione istantanea del carrello sulla guida, come indicato in Figura;
(b) il lavoro totale fatto dal sistema di forze agenti sul corpo per spostarlo da A a B;
(c) il lavoro totale fatto dal sistema di forze agenti sul corpo per spostarlo da A a C;
(d) la velocità del corpo nella posizione B, assumendo che la sua velocità iniziale nel punto A sia nulla;
(e) la reazione vincolare nel punto B.



Problema n. 9: Un blocco assimilabile a un punto materiale, di massa m = 2 kg è fissato ad un'estremità di una molla di massa trascurabile e di costante elastica k = 25 N/m avente un'estremità solidale a una parete fissa. Tra il blocco e la superficie del piano orizzontale di appoggio esiste attrito (μs = 0.6, μd = 0.4). All'istante t = 0, con la molla alla lunghezza di riposo l_0 = 1 m, al blocco è applicato un impulso istantaneo $\mathbf{J_0}$ = 2 kg m/s **i**. Determinare:

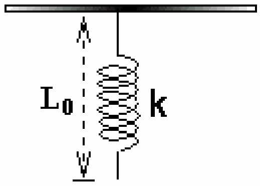
a) quanto spazio percorre il blocco prima di fermarsi;
b) il tempo impiegato dal blocco a fermarsi;
c) se la posizione dove il blocco si ferma è di equilibrio oppure no.

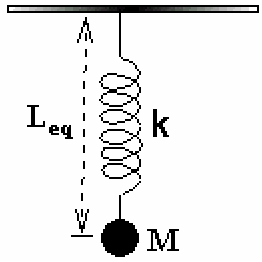


Problema n. 10: Un corpo puntiforme di massa m = 0.5 kg scivola su un piano orizzontale liscio con velocità v_0 = 2 m/s e urta l'estremità libera di molla) di costante elastica k e lunghezza di riposo x_0 = 20 cm, disposta orizzontalmente con l'asse parallelo alla direzione del moto del corpo e avente l'altra estremità fissata a una parete verticale fissa. Il corpo comprime la molla, fino al valore $x_0/2$, e viene poi rilanciato nella direzione opposta a quella di arrivo contro la molla. Calcolare:

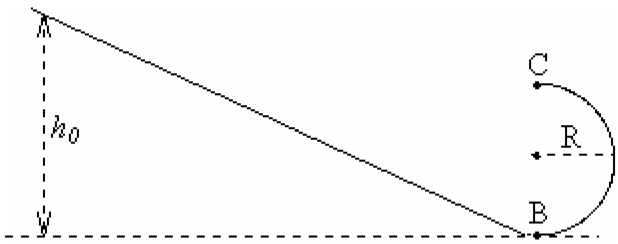
a) la costante elastica della molla;
b) la velocità con cui il corpo si stacca dalla molla; (il corpo abbandona la molla quando questa ha riacquistato la sua lunghezza di riposo);
c) quanto tempo il corpo resta a contatto con la molla
d) la massima accelerazione subita dal corpo e il punto in cui ciò avviene.

Problema n. 11: Una molla ideale, di lunghezza a riposo L_0 = 0.6 m, è sospesa al soffitto e una particella massa m = 250 g è attaccata al suo estremo libero. Quando la massa raggiunge la posizione di equilibrio la molla risulta 5 cm più lunga rispetto alla sua lunghezza a riposo. Calcolare:
(a) il valore della costante elastica k della molla;
(b) il periodo di oscillazione di un corpo puntiforme di massa M = 0.8 kg attaccato alla stessa molla;
(c) la legge oraria del moto di oscillazione della massa M, di cui al punto (b), inizialmente in quiete nella sua posizione di equilibrio, a seguito dell'applicazione di un impulso istantaneo di intensità J_0 = 1.2 kg m s^{-1} e diretto verso l'alto;
(d) la lunghezza massima della molla e quella minima durante il moto oscillatorio;
(e) l'energia meccanica totale della massa M in corrispondenza di tali configurazioni estreme.





Problema n. 12: Un corpo puntiforme di massa m = 2.5 kg può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato che si raccorda tangenzialmente con un profilo circolare di raggio R = 1 m, sì da costituire un unico vincolo liscio unilaterale. Si determini:
(a) la minima altezza h_0 (rispetto al punto più basso della guida) da cui il corpo deve partire (con velocità nulla) per raggiungere la sommità (punto C) del profilo circolare, senza mai staccarsi da esso; [h_0 = 5R/2]
(b) la reazione $\mathbf{R}_B$ della guida quando il corpo si trova nel punto più basso di essa; [$\mathbf{R}_B$ = 4 mg $\mathbf{j}$]
(c) la reazione $\mathbf{R}_C$ della guida quando il corpo si trova nel punto più alto di essa, assumendo che il corpo parta dalla stessa altezza h_0 di cui al punto (a) ma con velocità iniziale v_0 = 1.2 m/s.[$\mathbf{R}_C = -m\, v_0^2/R\ \mathbf{j}$]



Problema n. 13: Una particella di massa m = 0.2 kg si muove, partendo da ferma e da un'altezza h, scivola su un piano inclinato liscio fino a raggiungere una guida liscia che forma un anello di raggio R = 1 m (giro della morte) e dopo aver percorso il giro della morte finisce per comprimere una molla di costante elastica k = 200 N/m disposta lungo il piano orizzontale. Si calcoli:
a) il minimo valore di h per cui la particella arriva a comprimere la molla;
b) per tale valore di h, la massima compressione della molla;
Nota Bene: Discutere distintamente i due casi di vincolo (i) unilaterale e (ii) bilaterale.

Problema n. 14: Un punto materiale di massa m_1 = 1 kg è attaccato ad un'estremità di una fune ideale (inestensibile e di massa trascurabile) che passa attraverso un foro di un piano orizzontale liscio. Inizialmente il punto materiale striscia sul piano orizzontale con velocità di modulo costante v_0, descrivendo una circonferenza di raggio r_0 intorno al foro. Lentamente il filo viene tirato in modo che il raggio della traiettoria passi da r_0 a r_1. Calcolare:
a) la tensione del filo in funzione del raggio r_0 della circonferenza;
b) il lavoro fatto dalla tensione del filo per passare da r_0 a r_1;
c) la velocità v_f il punto materiale possiede quando si muove sulla circonferenza di raggio r_1.