TUTORAGGIO ANALISI II

a.a. 2012/2013

dott.ssa Saoncella

LEZIONE DEL 9/11/2012

Esercizio 1

Stabilire se le seguenti curve parametriche sono regolari

a) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ $\quad t \in [-1,1]$

b) $\gamma(t) = (\sin t, \pi - t)$ $\quad t \in [-1,1]$

c) $\gamma(t) = (\log(1+t), t - t^2, e^t)$ $\quad t \in [2,3]$

Soluzione

Una curva γ si dice regolare se $\gamma \in C^1([a,b])$ e $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in (a,b)$, regolare a tratti se esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ tale che $\phi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è regolare $\forall i = 0, \dots, N-1$.

a) Si ha che la curva $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, dove $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$.
Quindi abbiamo che $\gamma \in C^1[-1,1]$.
Osserviamo ora che quando $t = 0$, si ha che $\gamma'(t) = (0,0)$, cioè la derivata è nulla. Pertanto possiamo concludere che sull'intervallo $[-1,1]$ la curva γ non è regolare. É invece regolare a tratti.

b) La curva $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, dove $\gamma(t) = (\sin t, \pi - t)$ è derivabile. La derivata $\gamma'(t) = (\cos t, -1)$ è continua.
Quindi possiamo affermare che $\gamma \in C^1[-1,1]$.
Ora osserviamo che $\cos t = 0 \iff t = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Ma i valori di t per cui il coseno si annulla non appartengono all'intervallo $[-1,1]$. Quindi si ha che γ è regolare su $[-1,1]$.

c) La curva $\gamma:[2,3]\to\mathbb{R}^3$, con $\gamma(t)=(\log(1+t), t-t^2, e^t)$ è derivabile e la derivata $\gamma'(t)=(\frac{1}{1+t}, 1-2t, e^t)$ è continua. Osserviamo che $\frac{1}{1+t}\neq 0$ per ogni t, $1-2t=0$ se e solo se $t=1/2$, ma questo valore non appartiene all'intervallo $[2,3]$, infine e^t è la funzione esponenziale, pertanto non è mai nulla. Quindi abbiamo che $\gamma'(t)\neq(0,0,0)$ per ogni $t\in[2,3]$. Concludiamo perciò che γ è regolare.

Esercizio 2

Scrivere le equazioni parametriche delle rette del piano che verificano le seguenti condizioni:

a) retta passante per $P(4,2)$ e parallela al vettore $u=(-1,1)$.

b) retta passante per $P(-3,-5)$ e parallela all'asse delle ascisse.

Soluzione

Richiamo

dato un punto $P=(x_P, y_P)$ e un vettore $u=(u_x, u_y)$, le equazioni parametriche della retta passante per il punto P e parallela al vettore u sono:

$$\begin{cases} x = x_P + t u_x \\ y = y_P + t u_y \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Ritornando all'esercizio punto a) si ha che per $P(4,2)$ e $u=(-1,1)$ si ha

$$\begin{cases} x = 4-t \\ y = 2+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Punto b)

Osserviamo che una qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse è parallela al vettore $u=(1,0)$. Quindi per $P(-3,-5)$ e $u=(1,0)$ si ha

$$\begin{cases} x = -3+t \\ y = -5 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Esercizio 3

Scrivere delle equazioni parametriche della circonferenza del piano avente centro nel punto $C(2,1)$ e raggio $r=3$.

Soluzione

Richiamo

> la circonferenza di centro $C(x_c, y_c)$ e raggio r ha per equazioni parametriche:
>
> $$\begin{cases} x = x_c + r\cos t \\ y = y_c + r\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$
>
> (le coordinate polari).

Quindi per $C(2,1)$ ed $r=3$ si ha

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = 1 + 3\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

Esercizio 4

Scrivere una parametrizzazione dei segmenti aventi per estremi le seguenti coppie di punti

a) $A(1,1)$ e $B(2,3)$

b) $A(-1,1)$ e $B(2,-3)$

c) $A(-1,-1)$ e $B(2,3)$

Soluzione

Richiamo:

> dato un segmento di estremi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ la sua parametrizzazione è data dalla curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da
>
> $$\gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A);\ y_A + t(y_B - y_A))$$

Ritornando all'esercizio:

punto a)

Quindi per $A(1,1)$ e $B(2,3)$ si ha che $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è definito da

$$\gamma(t) = (1+t, 1+2t)$$

punto b)

Quindi per $A(-1,1)$ e $B(2,-3)$ si ha $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è definito da

$$\gamma(t) = (-1+3t, 1-4t)$$

punto c)

Quindi per $A(-1,-1)$ e $B(2,3)$ si ha che $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è definito da

$$\gamma(t) = (-1+3t, -1+4t)$$

ESERCIZIO 4

Scrivere una parametrizzazione degli archi di circonferenza del piano di centro $O(0,0)$ e raggio $R=1$, verificanti le seguenti condizioni, percorsi sia in senso orario che antiorario:

a) arco del I quadrante di estremi $A(0,1)$ e $B(1,0)$

b) arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(0,-1)$ e $B(-1,0)$.

SOLUZIONE

Per parametrizzare la circonferenza possiamo usare le coordinate polari.

a) Vogliamo che la circonferenza venga percorsa in senso antiorario, a partire dal punto $(1,0)$. Quindi la parametrizzazione sarà

$$\eta(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, \pi/2]$$

Mentre per quella in senso orario a partire dal punto $(0,1)$ si ha

$$\delta(t) = (\sin t, \cos t) \qquad t \in [0, \pi/2]$$

b) Vogliamo che la circonferenza venga percorsa in senso antiorario a partire dal punto $(0,-1)$. Quindi avremo

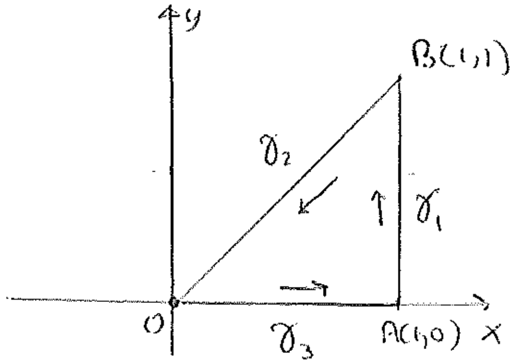
$$\eta(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \pi]$$

Mentre per quella in senso orario a partire dal punto $(-1,0)$

$$\delta(t) = (-\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, \tfrac{3}{2}\pi]$$
$$\left(\cos(\pi - t), \sin(\pi - t)\right)$$

ESERCIZIO 5

Scrivere una parametrizzazione regolare a tratti della curva del piano costituita dai lati del triangolo di vertici $A(1,0)$, $B(1,1)$ e $O(0,0)$ percorsa in senso antiorario a partire da A.



SOLUZIONE

Dobbiamo scrivere 3 parametrizzazioni, una per ogni lato del triangolo.
Iniziamo con il parametrizzare il segmento AB.
Osserviamo che l'ascissa è fissa, mentre l'ordinata varia. Quindi la parametrizzazione cercata è la curva

$$\gamma_1(t) = (1, t) \quad \text{dove} \quad t \in [0,1].$$

Consideriamo ora il segmento BO. In questo caso usiamo la formula del segmento passante per due punti vista nell'esercizio precedente. Andiamo dal punto $B(1,1)$ al punto $O(0,0)$. Quindi

$$\gamma_2(t) = (1-t, 1-t) \quad \text{dove} \quad t \in [0,1]$$

Infine consideriamo il segmento OA. Qui abbiamo che l'ordinata è fissa mentre l'ascissa varia. Andiamo dal punto O al punto A.

Quindi la curva cercata è

$$\gamma_3(t) = (t, 0) \quad \text{dove} \quad t \in [0, 1].$$

Per giustapporre le tre curve trovate operiamo una traslazione nel parametro t, definendo la nuova curva nel seguente modo:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \gamma_2(t-1) & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ \gamma_3(t-2) & \text{se } 2 \leq t < 3 \end{cases} = \begin{cases} (1, t) & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (2-t, 2-t) & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ (t-2, 0) & \text{se } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$