Calcolo Numerico
Corso di Laurea in Informatica
Appello del 10/07/2014 (durata due ore) – Tema 1

MAT.	COGNOME	NOME

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

Per ogni quesito, indicare la casella che ha la miglior risposta. Ogni risposta corretta vale 1 punto, errata o non data 0 punti.

1. Siano x, y numeri floating point dell'insieme $\mathbb{F}(10, 2, -1, 3)$. Allora , in assenza di underflow o di overflow, il loro prodotto $x \cdot y$ è sempre un numero di $\mathbb{F}$ ☐ vero ☐ falso

2. Il metodo di bisezione viene utilizzato per approssimare la radice $\xi \in [a_0 \ , \ b_0] = [1 \ , \ 4]$ dell'equazione $x - 3 = 0$. Ricordando che $x_k = (a_k + b_k)/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ e che l'errore associato a x_k è $e_k = \xi - x_k$, il rapporto $|e_1/e_0|$ vale

   ☐ $\dfrac{2}{11}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{4}{11}$ ☐ nessuna delle precedenti risposte

3. L'ordine del metodo di Newton utilizzato per approssimare la radice ξ di $xe^x = 1$ è

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ maggiore di 3

4. Sia $f(x) = 1 - x^2$. Partendo da $x_0 = 2$, la seconda iterata x_2 del metodo di Newton vale

   ☐ $\dfrac{41}{40}$ ☐ $\dfrac{5}{4}$ ☐ 1 ☐ nessuna delle precedenti risposte

5. Il metodo iterativo di Newton è usato per approssimare la radice $\xi = 1$ di $f(x) = (x - 1)^2$ partendo da $x_0 = 2$. Allora, l'errore $e_k = \xi - x_k$ al passo k-esimo è tale che

   ☐ $2^k|e_k| = |e_0|$ ☐ $|e_k| = \dfrac{|e_0|}{2^{k+1}}$ ☐ $\log_{10}(|e_k|) = \log_{10}(|e_0|) + k \log_{10}(2)$

   ☐ nessuna delle precedenti risposte

6. Lo zero $\xi = 1$ della funzione $f(x) = x^2 - 1$ è approssimato mediante il metodo della secante variabile partendo da $x_0 = 3$ e $x_1 = 2$. L'iterata x_2 vale ☐ 1.0 ☐ 1.2 ☐ 1.4 ☐ 1.6

7. Il metodo di Gauss-Seidel usato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

   è convergente per ogni scelta del punto iniziale $\mathbf{x}_0$

   ☐ vero ☐ falso ☐ solo se $||\mathbf{b}||_2 < 1$

8. Siano
$$L_i^{(n)}(x) = \frac{\prod_{r=0,r\neq i}^{n}(x - x_r)}{\prod_{r=0,r\neq i}^{n}(x_i - x_r)}, \quad i = 0, \ldots, n$$
gli $n+1$ polinomi di Lagrange associati ai nodi x_i, $i = 0, \cdots, n$. Allora il polinomio P definito dall'espressione
$$P(x) = \left(L_0^{(n)}(x) \cdot \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x) \right)^2$$
☐ è $P(x) = 0$ ☐ è $P(x) = 1$ ☐ ha grado n ☐ dipende dai nodi x_i

9. Il raggio spettrale della matrice
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
vale ☐ $|\sin(\theta)|$ ☐ $\sin(\theta)$ ☐ 1 ☐ $|\cos(\theta)|$

10. Siano dati la funzione $f(x) = \sin(x)$ ed i nodi equispaziati $x_k = x_0 + k \cdot h$, $k = 0, \ldots, 4$ con $x_0 = 0$ e $h = \pi/2$. Allora, la quantità q data da
$$q = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] + f[x_0, x_1, x_2] - f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]$$
è pari a ☐ 0 ☐ $-\frac{4}{\pi^2}$ ☐ $-\frac{8}{\pi^2}$ ☐ nessuna delle precedenti risposte

11. Il metodo di Cavalieri-Simpson composto con m intervalli viene usato per approssimare l'integrale
$$I = \int_{-10}^{10} \left[\left(x^2 - x \right)^2 - x^4 \right] dx$$
con un errore assoluto inferiore a 10^{-6}. Il più piccolo valore di m che assicura la richiesta è (ricordarsi che in ognuno degli m intervalli viene applicata Cavalieri-Simpson)

☐ 2 ☐ 4 ☐ 16 ☐ nessuna delle precedenti risposte è corretta

12. Il polinomio di grado $n = 1$ che approssima ai minimi quadrati i dati $(-2, 2)$, $(0, 0)$, $(2, 4)$ è

☐ $\frac{x}{2} + 1$ ☐ $2x + \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{x}{2} + 2$ ☐ nessuna delle risposte date è corretta

13. Cosa troviamo nel WorkSpace di Matlab al termine delle seguenti due istruzioni?

```
x = 1:2:7;
v = x*x';
```

☐ un vettore
☐ una matrice di ordine 4 ed un vettore colonna
☐ una matrice di ordine 4
☐ una matrice di ordine 1 ed un vettore riga

14. L'istruzione Matlab

```
sum( (1:3:6).^2 )
```

produce ☐ un errore ☐ [1 9 36] ☐ 46 ☐ una matrice 3×2

15. Le istruzioni Matlab

```
A = eye(3);
A(:,3) = length( size( A(:) ) )*ones( size( A(:,2) ) );
```

producono

☐ un errore ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

16. Le istruzioni Matlab

```
f = inline('x.^2');
a = 2;
while( f(a) < 10 )
    a = a+1
end
```

stampano a video

☐ 2 e 3
☐ 3 e 4
☐ a e $a + 1$
☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta

17. Indicare quali delle seguenti istruzioni Matlab utilizzate per definire una function di nome pluto è corretta, barrando la casella OK e quale non lo è barrando la casella NO

☐ OK ☐ NO function [z, x] = pluto(x,y)
☐ OK ☐ NO function z = pluto[x,y]
☐ OK ☐ NO function (x,y) = pluto(x,y)
☐ OK ☐ NO function x = pluto(x)

DOMANDA TEORICA (max 3 punti)

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Dare le definizioni di norma matriciale indotta e di raggio spettrale $\rho(A)$. Quindi dimostrare che per ogni norma matriciale indotta si ha $\rho(A) \leq ||A||$.

Esercizi

Rispondere in modo sintetico ed esauriente nello spazio sottostante ciascun esercizio.

Esercizio 1 (6 punti) Si consideri il metodo iterativo di punto fisso $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k + 2$, $k = 0, 1, \ldots$.

(a) Calcolare gli eventuali punti fissi del metodo. A quali di questi punti fissi può convergere il metodo supponendo di partire con un x_0 abbastanza vicino al punto fisso?

(b) Proporre, se possibile, il più grande intervallo $[a\ ,\ b]$ tale che la successione x_k generata dal metodo converge allo stesso punto fisso per ogni scelta di $x_0 \in [a\ ,\ b]$.

Sia ora x_k la successione generata partendo da $x_0 = 3/2$.

(c) Calcolare x_1 ed x_2. Dire se la successione x_k è convergente e, in caso affermativo, a quale valore ξ converge. La successione x_k è monotona? Se sì, di che tipo?

(d) Calcolare, se possibile, l'ordine del metodo.

Esercizio 2 (5 punti) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare <u>tutti</u> i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui è convergente il metodo iterativo di Jacobi utilizzato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) Scrivere, per il metodo iterativo di Gauss-Seidel, le tre equazioni di aggiornamento che esprimono $x_i^{(k+1)}$, $i = 1, 2, 3$.

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare, col metodo dei trapezi composto usando $m = 2$ ed $m = 4$ intervalli, le approssimazioni $\hat{I}_2$ ed $\hat{I}_4$ per l'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} x^4 dx$$

Quindi, usando le due stime $\hat{I}_2$ e $\hat{I}_4$, ottenere una stima migliore di I.