# Matematica e Statistica

## Prova d'esame (25/09/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

# Matematica e Statistica

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (25/09/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

**** Svolgere prima i punti* (a) *di* <u>*tutti*</u> *gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). *****

**▸▸▸▸ Test a quiz sul retro ▸▸▸▸**

(1) (a) Nello spazio tridimensionale il piano $\Pi$ è ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 2, -3)$ e passa per il punto $A(0, 2, 1)$, mentre la retta $r$ passa per $A$ ed è ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w} = (0, 1, -1)$. Determinare entrambi in forma parametrica e cartesiana.

(b) Decomporre il vettore $\vec{v}$ nelle direzioni parallela e ortogonale a $\vec{w}$, e calcolare l'area del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(2) Studiare (giustificando le conclusioni) la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + 3\cos^2 x}$ , e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 - 4}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\, dx$ (ove $f$ è quella dell'Ex. 2).

(b) Disegnare $S = \left\{(x, y) : |x| \le 1\,,\ -\frac{x+1}{x+2} \le y \le e^{-2x}\,,\ x \ge y - 1\right\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x, y) = \dfrac{x + 1}{xy + 1}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali.

(b) Calcolare gli estremi assoluti di $g$ sull'insieme $\mathcal{T} = \{(x, y) : 0 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le 2 - x\}$.

(5) Sono date le equazioni differenziali $y' = y^3 \log x$ e $y'' - 2y' + 4y = 4x - 3e^x$.

(a) Trovare le soluzioni di ciascuna delle due equazioni, specificando se ve ne sono in comune.

(b) Quali delle soluzioni trovate ammettono un punto di minimo locale stretto in $x = 1$?

---

[1] Lo studio della convessità è facoltativo.

# Matematica e Statistica

Prova di $\boxed{\text{STATISTICA}}$ (25/09/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

**Esercizio 1)**
Si vogliono verificare il numero di vaccinazioni efettuate da un diciottenne in Italia. A tale scopo si è estratto un campione di 30 ragazzi richiedendo ad ognuno il numero di vaccinazioni sostenute.
Si sono ottenute le seguenti osservazioni.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 4 | 5 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | 3 |
| 1 | 1 | 6 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 1 | 3 | 5 | 4 | 2 | 1 | 4 | 3 | 5 | 4 |

Il candidato

a) Determini la tipologia del carattere osservato.
b) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.
c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.
d) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.

**Esercizio 2)**
Il candidato usi le osservazioni presentate nell'esercizio precedenti per stimare puntualmente e per intervallo la varianza della distribuzione della variabile casuale

*X: numero di vaccinazioni di un diciottenne italiano*

Il candidato indichi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

**Esercizio 3)**
Un indagine svolta a livello europeo condotta sui dati dell'ultimo decennio[1] mostra che un diciottenne ha effettuato in media 3.2 vaccinazioni con una varianza di 2.7. Utilizzzando il campione descritto nell'esercizio 1, è corretto asserire, ad un livello di significatività del 10%, che un diciottenne italiano ha subito un numero di vaccinazioni inferiore a alla media europea? Il candidato indichi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

**Esercizio 4)**
Si considerino i seguenti eventi dichiarati indipendenti.

$E_1$ : si ottenga $x \geq 0$ dove $x$ è estratto da una v. c. distribuita come un $\chi^2(2)$.
$E_2$: si ottenga y>2 dove $y$ è estratto da una v. c. *Unif(-5;5)*.

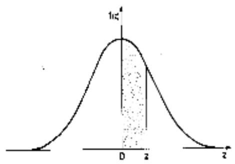
a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi statisticamente dipendenti, evento certo ed evento impossibile.

1 Dato fittizio

| | |
|---|---|
| Tavola I<br><br>Integrali della variabile casuale normale standardizzata z | |

Tavola I

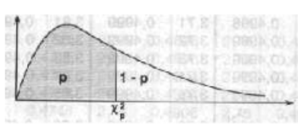
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.




| ν \ p | 0,005 | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0.10 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 0,90 | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0010 | 0,0039 | 0,0158 | 0,102 | 0,455 | 1.32 | 2,71 | 3,84 | 5.02 | 6,63 | 7,88 | 10,8 |
| 2 | 0,0100 | 0.0201 | 0,0506 | 0,103 | 0,211 | 0,575 | 1,39 | 2,77 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 10,6 | 13,8 |
| 3 | 0,0717 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,584 | 1,21 | 2,37 | 4,11 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,3 | 12,8 | 16,3 |
| 4 | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 1,06 | 1.92 | 3,36 | 5,39 | 7,78 | 9,49 | 11,1 | 13,3 | 14,9 | 18,5 |
| 5 | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,15 | 1,61 | 2.67 | 4,35 | 6,63 | 9.24 | 11,1 | 12,8 | 15,1 | 16,7 | 20,5 |
| 6 | 0,676 | 0,872 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 3.45 | 5,35 | 7,84 | 10,6 | 12,6 | 14,4 | 16,8 | 18,5 | 22,5 |
| 7 | 0,989 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 4,25 | 6,35 | 9,04 | 12,0 | 14.1 | 16,0 | 18,5 | 20.3 | 24,3 |
| 8 | 1,34 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 5,07 | 7,34 | 10,2 | 13,4 | 15.5 | 17,5 | 20,1 | 22,0 | 26,1 |
| 9 | 1.73 | 2,09 | 2,70 | 3.33 | 4,17 | 5,90 | 8,34 | 11,4 | 14,7 | 16.9 | 19,0 | 21,7 | 23,6 | 27,9 |
| 10 | 2.16 | 2,56 | 3,25 | 3,94 | 4,87 | 6,74 | 9,34 | 12,5 | 16,0 | 18,3 | 20,5 | 23,2 | 25,2 | 29,6 |
| 11 | 2,60 | 3,05 | 3,82 | 4,57 | 5,58 | 7,58 | 10,3 | 13,7 | 17,3 | 19,7 | 21,9 | 24,7 | 26,8 | 31,3 |
| 12 | 3,07 | 3,57 | 4,40 | 5.23 | 6,30 | 8,44 | 11,3 | 14,8 | 18,5 | 21,0 | 23,3 | 26,2 | 28,3 | 32,9 |
| 13 | 3,57 | 4,11 | 5,01 | 5,89 | 7,04 | 9,30 | 12,3 | 16,0 | 19,8 | 22,4 | 24,7 | 27,7 | 29,8 | 34,5 |
| 14 | 4,07 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 10,2 | 13,3 | 17,1 | 21,1 | 23,7 | 26,1 | 29,1 | 31,3 | 36,1 |
| 15 | 4,60 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 11,0 | 14,3 | 18,2 | 22,3 | 25,0 | 27,5 | 30,6 | 32,8 | 37,7 |
| 16 | 5,14 | 5,81 | 6,91 | 7,96 | 9.31 | 11,9 | 15,3 | 19,4 | 23.5 | 26,3 | 28,8 | 32,0 | 34,3 | 39,3 |
| 17 | 5,70 | 6,41 | 7,56 | 8,67 | 10,1 | 12,8 | 16,3 | 20,5 | 24,8 | 27,6 | 30,2 | 33,4 | 35,7 | 40,8 |
| 18 | 6,26 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10,9 | 13,7 | 17,3 | 21,6 | 26,0 | 28,9 | 31,5 | 34,8 | 37,2 | 42,3 |
| 19 | 6,84 | 7,63 | 8,91 | 10.1 | 11,7 | 14,6 | 18,3 | 22,7 | 27,2 | 30,1 | 32,9 | 36,2 | 38,6 | 43,8 |
| 20 | 7,43 | 8,26 | 9.59 | 10.9 | 12,4 | 15,5 | 19,3 | 23,8 | 28,4 | 31,4 | 34,2 | 37,6 | 40,0 | 45,3 |
| 21 | 8,03 | 8,90 | 10,3 | 11,6 | 13,2 | 16,3 | 20,3 | 24,9 | 29,6 | 32,7 | 35,5 | 38,9 | 41,4 | 46,8 |
| 22 | 8,64 | 9,54 | 11,0 | 12,3 | 14,0 | 17,2 | 21,3 | 26,0 | 30,8 | 33,9 | 36,8 | 40,3 | 42,8 | 48,3 |
| 23 | 9,26 | 10.2 | 11,7 | 13,1 | 14,8 | 18,1 | 22.3 | 27,1 | 32,0 | 35,2 | 38,1 | 41,6 | 44,2 | 49,7 |
| 24 | 9,89 | 10,9 | 12,4 | 13,8 | 15,7 | 19,0 | 23,3 | 28,2 | 33,2 | 36.4 | 39,4 | 43,0 | 45.6 | 51,2 |
| 25 | 10,5 | 11,5 | 13,1 | 14,6 | 16,5 | 19,9 | 24,3 | 29,3 | 34,4 | 37,7 | 40,6 | 44,3 | 46,9 | 52,6 |
| 26 | 11,2 | 12,2 | 13,8 | 15,4 | 17,3 | 20,8 | 25,3 | 30,4 | 35,6 | 38,9 | 41,9 | 45,6 | 48,3 | 54,1 |
| 27 | 11,8 | 12,9 | 14,6 | 16,2 | 18.1 | 21,7 | 26,3 | 31,5 | 36,7 | 40,1 | 43,2 | 47,0 | 49,6 | 55,5 |
| 28 | 12,5 | 13,6 | 15,3 | 16,9 | 18.9 | 22,7 | 27,3 | 32.6 | 37,9 | 41,3 | 44.5 | 48,3 | 51,0 | 56,9 |
| 29 | 13,1 | 14,3 | 16,0 | 17,7 | 19,8 | 23,6 | 28,3 | 33,7 | 39,1 | 42,6 | 45.7 | 49,6 | 52,3 | 58,3 |
| 30 | 13,8 | 15,0 | 16,8 | 18,5 | 20,6 | 24,5 | 29,3 | 34.8 | 40,3 | 43,8 | 47,0 | 50,9 | 53,7 | 59,7 |

# Soluzioni

## MATEMATICA

**(1)** (a) Il piano $\Pi$, ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 2, -3)$, avrà equazione cartesiana del tipo $x + 2y - 3z + k = 0$, e il passaggio per il punto $A(0, 2, 1)$ dà $k = -1$, da cui $x + 2y - 3z - 1 = 0$. Due vettori ortogonali a $\vec{v}$ e non paralleli tra loro sono ad esempio $\vec{u}_1 = (2, -1, 0)$ e $\vec{u}_1 = (2, -1, 0)$, dunque una forma parametrica è $\Pi = \{(0, 2, 1) + s(2, -1, 0) + t(0, 3, 2) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(2s, 2 - s + 3t, 1 + 2t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ • La retta $r$, ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w} = (0, 1, -1)$, sarà parallela al loro prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w} = (1, 1, 1)$, e dunque si ha la forma parametrica $r = \{(0, 2, 1) + t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 2 + t, 1 + t) : t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo poi $t = x$ in $(y, z) = (2 + t, 1 + t)$ si ottiene una forma cartesiana dal sistema delle due equazioni $x - y + 2 = 0$ e $x - z + 1 = 0$.

(b) La decomposizione di $\vec{v}$ nelle direzioni parallela e ortogonale a $\vec{w}$ è data da $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ con $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w} = \frac{5}{2}\vec{w} = (0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ e $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = (1, 2, -3) - (0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. • L'area del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è uguale al modulo del loro prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w} = (1, 1, 1)$, dunque vale $\sqrt{3}$.

**(2)** (Figura 1) Poiché $1 + 3\cos^2 x > 0$, la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos^2 x}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ e derivabile infinite volte; inoltre essa è dispari ed evidentemente periodica di periodo $2\pi$, dunque basterà studiarla sull'intervallo $[0, \pi]$, nel quale si annulla negli estremi ed è positiva altrove. La derivata $f'(x) = \frac{\cos x(1+3\cos^2 x)-\sin x(-6\sin x\cos x)}{(1+3\cos^2 x)^2} = \frac{\cos x\,(7-3\cos^2 x)}{(1+3\cos^2 x)^2}$ si annulla in $x = \frac{\pi}{2}$ ed è positiva per $0 < x < \frac{\pi}{2}$: ne ricaviamo che $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo (in realtà assoluto), con $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Derivando ulteriormente, dopo pazienti calcoli si ottiene $f''(x) = -\frac{\sin x\,(9\cos^4 x-72\cos^2 x+7)}{(1+3\cos^2 x)^3}$, che si annulla in $x = 0$, in $x = \pi$ e quando $\cos^2 x = 4 \pm \frac{\sqrt{137}}{3}$, ovvero (escludendo $4 + \frac{\sqrt{137}}{3} > 1$ e considerando solo $4 - \frac{\sqrt{137}}{3} \sim 0{,}1$) quando $\cos x = \pm a$ con $a := \sqrt{4 - \frac{\sqrt{137}}{3}} \sim 0{,}31$: dunque oltre ai prevedibili flessi in $x = 0$ e $x = \pi$ ve ne sono altri due in $x = \arccos a \sim 1{,}25$ e $x = \pi - \arccos a \sim 1{,}89$, ben visibili in figura.

**(3)** (a) Si ha $x^3 = x(x^2-4)+4x$, dunque $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2-4}\,dx = \int_0^1 (x+2\frac{2x}{x^2-4}\,dx = (\frac{1}{2}x^2+2\log|x^2-4|]_0^1 = \frac{1}{2}+2\log 3-4\log 2 \sim -0{,}1$. • Posto $t = \cos x$ (da cui $dt = -\sin x\,dx$) vale $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int_1^{-1} \frac{1}{1+3t^2}\,(-dt) = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(\sqrt{3}t)^2}\,dt = (\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}t)]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3})) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \sim 1{,}2$

(b) (Figura 2) L'area di $S$ risulta $\int_{-1}^0 (x+1)\,dx + \int_0^1 e^{-2x}\,dx + \int_1^{-1}(-\frac{x+1}{x+2})\,dx = (\frac{1}{2}x^2+x]_{-1}^0 + (-\frac{1}{2}e^{-2x}]_0^1 + (\log|x+2| - x]_1^{-1} = (0) - (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}e^{-2}) - (-\frac{1}{2}) + (1) - (\log 3 - 1) = 3 - \frac{1}{2}e^{-2} - \log 3$ (che vale circa 1,83).

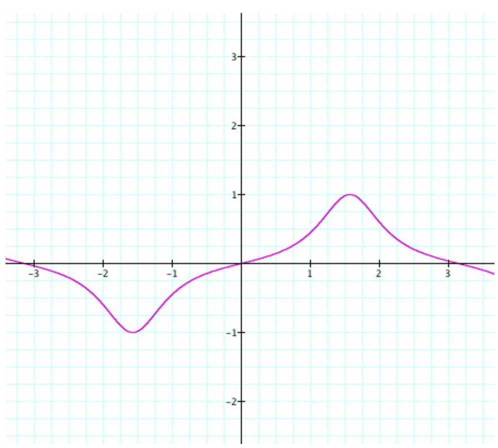
**(4)** (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x, y) = \frac{x+1}{xy+1}$ è data da $\frac{x+1}{xy+1} \neq 0$: vanno dunque esclusi i due rami dell'iperbole equilatera $xy = -1$ (nel 2o e 4o quadrante). Si tratta di una funzione differenziabile in tutto il suo dominio, in quanto le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1-y}{(xy+1)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x(x+1)}{(xy+1)^2}$ risultano continue. Si ha $g(x, y) = 0$ per $x + 1 = 0$, ovvero sulla retta verticale $x = -1$. Si ha invece $g(x, y) > 0$ quando $\frac{x+1}{xy+1} > 0$: il numeratore $x + 1$ è positivo a destra della retta $x = -1$, il denominatore $xy + 1$ lo è nei punti compresi tra i due rami dell'iperbole equilatera $xy = -1$, e il segno di $g$ ne segue per prodotto (si tratta delle zone segnate in giallo). I limiti interessanti sono quelli nei punti dell'iperbole equilatera e a $\infty_2$. In un punto $(x_0, y_0)$ dell'iperbole equilatera (dunque tale che $y_0 = -\frac{1}{x_0}$) diverso dal punto $A(-1, 1)$ (intersezione tra la retta verticale degli zeri e l'iperbole) il limite esiste e vale $\mp\infty$ a seconda del lato dal quale si tende al punto stesso; invece in $A$ e a $\infty_2$ il limite non esiste, perché tendendovi lungo la retta verticale $x = -1$ degli zeri il limite è zero mentre lungo la retta orizzontale $y = 1$ la funzione vale costantemente 1 e dunque anche il limite lungo essa è 1. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, ovvero il solo punto $P(0, 1)$ (oltre al punto $A$ che però è fuori dal dominio); a conti fatti la matrice hessiana di $g$ risulta $\mathsf{H}_g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2y(y-1)}{(xy+1)^3} & \frac{xy-2x-1}{(xy+1)^3} \\ \frac{xy-2x-1}{(xy+1)^3} & \frac{2x^2(x+1)}{(xy+1)^3} \end{pmatrix}$; essendo $\mathsf{H}_g(P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e dunque $\det \mathsf{H}_g(P) < 0$, il criterio dell'hessiano ci dice subito che $P$ è un punto di sella.

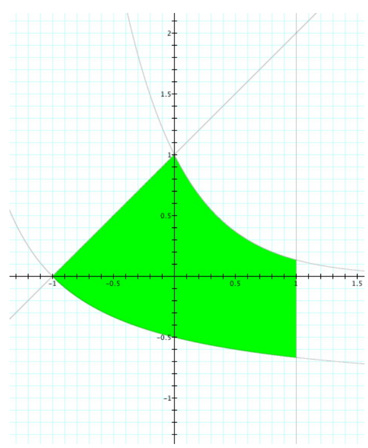
(b) (Figura 3) L'insieme $\mathcal{T} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 - x\}$ è il triangolo chiuso di estremi $O(0, 0)$, $B(2, 0)$ e $C(0, 2)$: per la ricerca degli estremi assoluti di $g$ su $\mathcal{T}$ (che esistono in base a Weierstrass, essendo $\mathcal{T}$ un sottoinsieme compatto —ovvero chiuso e limitato— interamente contenuto nel dominio di $g$, che è continua) dividiamo $\mathcal{T}$ nelle zone $\mathcal{T}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{T}_1$ del lato orizzontale $OB$ privato dei vertici; $\mathcal{T}_2$ del lato verticale $OC$ privato dei vertici; $\mathcal{T}_3$ del lato obliquo $BC$ privato dei vertici; e $\mathcal{T}_4 = \{O, B, C\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per $g$.

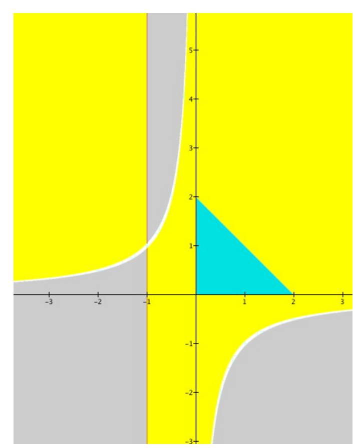
Ora, come visto prima l'unico è $P(0,1)$, che non sta in $\mathcal{T}_0$ (e tra l'altro, essendo già stato appurato che si tratta di una sella, non sarebbe stato interessante ai fini della nostra ricerca). • Sul lato orizzontale $\mathcal{T}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x) := g(x,0) = x+1$, con $0 < x < 2$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x) = 1$, il che però non accade mai. • Sul lato verticale $\mathcal{T}_2$ la funzione vale $\varphi_2(y) := g(0,y)$ vale costantemente 1: teniamo dunque presente tutti i suoi punti. • Sul lato obliquo $\mathcal{T}_3$ la funzione vale $\varphi_3(x) := g(x, 2-x) = -\frac{x+1}{x^2-2x-1}$, con $0 < x < 2$: la derivata $\varphi_3'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x^2-2x-1)^2}$ si annulla per $x = -1 \pm \sqrt{2}$, dei quali il solo valore accettabile è $\sqrt{2}-1$. Si trova così il punto $Q(\sqrt{2}-1, 3-\sqrt{2})$. • Infine, i tre punti $O$, $B$, $C$ di $\mathcal{T}_4$ vanno tenuti tutti presenti. • Gli estremi assoluti di $g$ su $\mathcal{T}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito del punto $Q$, dei tre vertici $O$, $B$, $C$ e dei punti del lato verticale $OC$: poiché $g(Q) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \sim 0{,}85$, $g(O) = g(C) = g(\text{lato } OC) = 1$ e $g(B) = 3$, il massimo assoluto di $g$ su $\mathcal{T}$ è 3 (assunto in $B$) e il minimo assoluto è $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ (assunto in $Q$).

**(5)** (a) L'equazione differenziale $y' = y^3 \log x$ è del primo ordine a variabili separabili: oltre alla soluzione costante $y \equiv 0$, separando si ottiene $y^{-3}\,dy = \log x\,dx$, da cui integrando $-\frac{1}{2y^2} = x(\log x - 1) + k$, da cui $y(x) = \mp\frac{1}{\sqrt{2x(1-\log x)+k}}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. • L'equazione $y'' - 2y' + 4y = 4x - 3e^x$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 - 2t + 4 = 0$ ha soluzioni $t = 1 \pm i\sqrt{3}$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = A\cos(x\sqrt{3}) + B\sin(x\sqrt{3})$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per il termine non omogeneo $4x$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ax + b$, e i calcoli danno $(a,b) = (-2,-1)$; una per $-3e^x$ sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = ce^x$, e i calcoli danno $c = -1$; dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = A\cos(x\sqrt{3}) + B\sin(x\sqrt{3}) - 2x - 1 - e^x$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • Le due equazioni non hanno alcuna soluzione in comune.

(b) Chiedere che una soluzione $y(x)$ abbia il grafico passante per $(1,-1)$ equivale ovviamente a chiedere che $y(1) = -1$. Per le soluzioni della prima equazione ciò dà $-1 = \mp\frac{1}{\sqrt{2+k}}$, da cui la scelta del segno "$-$" e $k = -1$: l'unica soluzione con questa proprietà è dunque $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x(1-\log x)-1}}$. Per quelle della seconda ciò dà $-1 = A\cos(\sqrt{3}) + B\sin(\sqrt{3}) - 2 - 1 - e$, ovvero $B = \frac{2+e-A\cos(\sqrt{3})}{\sin(\sqrt{3})}$, dunque le soluzioni con questa proprietà sono quelle del tipo $y(x) = A\cos(x\sqrt{3}) + \frac{2+e-A\cos(\sqrt{3})}{\sin(\sqrt{3})}\sin(x\sqrt{3}) - 2x - 1 - e^x$ al variare di $A \in \mathbb{R}$.







**1.** Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. (4.b): zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione $g$; il punto stazionario (porpora); l'insieme $\mathcal{T}$ (azzurro).

---

STATISTICA

*a) Determini la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) discreto (in quanto non è possibile fare una frazione di misurazioni).

b*) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.*

Un indice di posizione di una serie di osservazioni indica il valore centrale che viene assunto dalla serie. Gli indici di posizione visti a lezione sono tre: moda, mediana e media. Per i caratteri in esame sono calcolabili tutti e tre. In questa sede si è scelto di calcolare la media.
Dalle osservazioni è possibile individuare 7 modalità (da 0 a 6) e, sfruttando i dati in tabella 1, è possibile calcolare la seguente media

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{n} = \frac{90}{30} = 3$$

*c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.*
Avendo scelto la media come indice di posizione l'indice di variabilità associato risulta essere la deviazione standard, (ovvero la radice quadrata della varianza). Utilizzando i calcoli ripostati in tabella è possibile ottenere:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} = \frac{64}{30} = 2.13 \qquad \sigma = \sqrt{2.13} = 1.46$$

*d) Fornisca una rappresentazione grafica opportuna.*

Per caratteri quanitativi discreti due rappresentazioni frequenti sono il diagramma a barre, il diagramma a torta ed il box plot. A lato si riposta un esempio del primo.

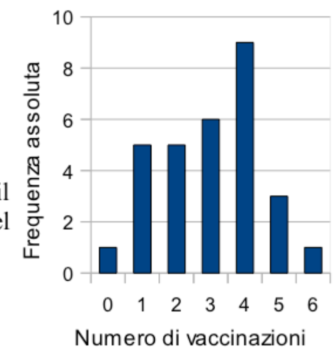



Tabella 1 - dati relativia ai primi 3 esercizi

| i | $x_i$ | $n_i$ | $n_i x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $n_i(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | -3 | 9 | 9 |
| 2 | 1 | 5 | 5 | -2 | 4 | 20 |
| 3 | 2 | 5 | 10 | -1 | 1 | 5 |
| 4 | 3 | 6 | 18 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 4 | 9 | 36 | 1 | 1 | 9 |
| 6 | 5 | 3 | 15 | 2 | 4 | 12 |
| 7 | 6 | 1 | 6 | 3 | 9 | 9 |
| Totali | | 30 | 90 | | | 64 |

**Esercizio 2)**
Possiamo modellare il processo di generazione dei dati del presentati nell'esercizio 1 come il frutto di diverse estrazioni dalla variabile casuale

X : *numero di vaccinazioni effettuate da un diciottenne italiano*

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $n = 30$ osservazioni.
Continuando con il modello precedentemente definito l'esercizio richiede di stimare *Var[X]* puntualmente e per intervallo.
La stima è possibile solo se la le estrazioni sono indipendenti ed identicamente distribuite e se la dimensione del campione è pari ad almeno 30 unità. Nel caso in esame entrambe le ipotesi si possono considerare verificati.

Lo stimatore puntuale della varianza è la campionaria che, utilizzando i conti riportati in tabella produce la seguente stima

$$\hat{Var}[X]=s^2=\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i(o_i-\bar{o})^2}{n-1}=\frac{64}{29}=2.207$$

Per ottenere la stima per intervallo occorre fissare un livello i di confidenza *α*. Posto *α= 90%,* la stima per intervallo è data dalla seguente formula

$$\hat{Var}[P]\in\left[\frac{(n-1)s^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)};\frac{(n-1)s^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]=\left[\frac{29\frac{64}{29}}{X^2_{0.95}(29)};\frac{29\frac{64}{29}}{X^2_{0.05}(29)}\right]=\left[\frac{64}{42.6};\frac{64}{17.7}\right]=[1.50;3.61]$$

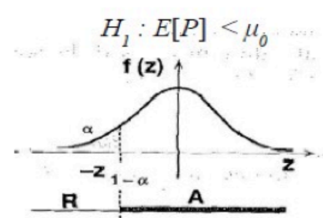
**Esercizio 3)**
Nell'esercizio viene richiesto di realizzare un test di ipotesi sul valor atteso della variabile casuale X. Nello specificho si richiede se siai inferiore a quello della v.c. *P: numero di vaccinazioni effettuate da un diciottenne europeo* avente *E[P] = 3.2* e *Var[P] = 2.7.* Nel caso in esame le due ipotesi sono

*H0: E[X]= 3.2*
*H1: E[X]< 3.2*

Per procedere alla verifica del test di ipotesi è necessario avere un campione di almeno trenta elementi ottenuti da estrazioni di tipo bernoulliano (ovvero i.i.d.). Entrambe le ipotesi possono dirsi confermate.

Lo stimatore del valor atteso da utilizzare è la media campionaria. Supponendo vera l'ipotesi nulla (H0) la media campionaria calcolata su di un campione di 30 elementi estratti in maniera benoulliana si distribuisce come la seguente normale

$$N\left(E[P];Var\frac{[P]}{n}\right)=N(3.2;\frac{2.7}{30})=N(3.2;0.09)$$




Dal tipo di ipotesi alternativa (H1) possiamo stabilite come il test da realizzare sia ad una coda, come indicato dalla figura a lato. Da cui si ricava la seguente regione di accettazione (dell'ipotesi nulla)

$$A:[-1.28;+\infty[$$

Per verificare se il campione ricade nella regione di accettazione è sufficiente standardizzare la media campionaria calcolata all'esercizio 1. Ottenendo il seguente valore standard

$$z=\frac{\bar{x}-E[P]}{\sqrt{\frac{Var[P]}{n}}}=\frac{3-3.2}{\sqrt{0.09}}=-\frac{0.2}{0.3}=-0.67$$

Essendo il valore interno alla regione di accettazione, si accetta l'ipotesi nulla. Si puo per tanto dire che con una significatività del 10 % in numero di vaccinazioni effettuate da un diciottenne in italia non è inferiore alla media europea.

**Esercizio 4)**
Nel testo si considerano come eventi elementari delle estrazioni da due vv. cc. continue. Si ricorda che per una v.c. continua *X*, la probabilità di ottenere una realizzazione *x* compresa fra due estremi $x_{inf}$ ed $x_{sup}$ è data dall'integrale (area sottesa) dalla densità di probabilità $f_X(x)$ fra $x_{inf}$ ed $x_{sup}$. In simboli

$$P(x\in[x_{inf};x_{sup}])=\int_{x_{inf}}^{x_{sup}} f_X(\tau)\,d\tau$$

*a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.*

Per il calcolo di $P(E_1)$, si deve calcolare l'area sottesa dalla curva della densità di probabilità di un chi quadro a *2* gradi di libertà da meno infinito a 0. Poiche i valori che assume la v.c. chi quadro per ogni possibile grado di liberta sono tutti non negativi la probabilità richiesta è l'evento certo.

La probabilità dell'evento $E_2$ è pari alla probabilità di estrarre un numero *y* positivo da una v. c. uniforme fra *-5* ed *5*. In questo caso è possibile ricavare la d.d.p. della v.c. *Y.* Basta imporre che l'area sottesa dalla d.d.p. sia unitaria. Pertanto si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\tau)\, d\tau = 1$$

poiche la d.d.p è nulla per valori esterni all'intervallo *[-5; 5]* la predente diviene

$$\int_{-5}^{+5} f_Y(\tau)\, d\tau = 1$$

ricordando che la d.d.p. è costante si ha che

$$\int_{-5}^{+5} C d\tau = (5-(-5))C = 10\mathrm{C} = 1$$

da cui si ha che C= 1/10= 0.1.

Il calcolo della probabilità richiesta diviene ora facile

$$P(E_2) = P(y>2) = \int_2^5 \frac{1}{10} d\tau = (5-2)\frac{1}{10} = 0.3$$

Propedeutico al calcolo delle altre due probabilità e il calcolo della probabilità dell'evento intersezione (ovvero che i due eventi si verifichino contemporaneamente). Per eventi indipendenti essa è il prodotto delle due probabilità ovvero

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) P(E_2) = 1 \cdot 0.3 = 0.3$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 1 + 0.3 - 0.3 = 1 \qquad P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{0.3}{0.3} = 1$$

*b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi statisticamente indipendenti, evento certo ed evento impossibile.*

Due eventi si dicono

- *statisticamente indipendenti* se il verificarsi di un evento non altera la probabilità del verificarsi dell'altro. Se A e B sono due eventi statisticamente indipendenti si ha che

  $P(A|B) = P(A)$ $\qquad$ $P(B|A) = P(B)$
- *certo*: un evento certo è un evento che si verifica sempre. Se E è un evento certo certo si ha che $P(E) = 1$.
- *impossibile*: un evento impossibile è un evento che non si verifica mai. Se E è un evento impossibile certo si ha che $P(E) = 0$.