TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera

a.a. 2009/10

Lezione XXI

☆ Rappresentazione aggiunta di G su $\mathfrak{g}$

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ \mathfrak{g}}}{\mathrm{Ad}\, h \cdot X} := (R_{h^{-1}})_* X$$

Si ricordi $R_h g = g \cdot h$

$(R_h \circ R_g)x = $

$= x \cdot g \cdot h = R_{gh} x$

inoltre $L_g R_h x =$

$= g x h = R_h L_g x$

i.e. le traslazioni destre e sinistre commutano

Mostriamo che effettivamente, se $X \in \mathfrak{g}$, è $(R_{h^{-1}})_* X \in \mathfrak{g}$. Ma ciò è immediato:

$$(L_g)_* (R_{h^{-1}})_* X = (L_g R_{h^{-1}})_* X$$

$$= (R_{h^{-1}} L_g)_* X = (R_{h^{-1}})_* [(L_g)_* X] = (R_{h^{-1}})_* X \,.$$

Si ha $\mathrm{Ad}(g_1 g_2) X = (R_{(g_1 g_2)^{-1}})_* X = (R_{g_2^{-1} g_1^{-1}})_* X$

$$= (R_{g_1^{-1}} \circ R_{g_2^{-1}})_* X = (R_{g_1^{-1}})_* (R_{g_2^{-1}})_* X$$

$$= \mathrm{Ad}\, g_1 \circ \mathrm{Ad}\, g_2$$

$G \ni g \longmapsto \mathrm{Ad}\, g \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi

A livello matriciale tutto è più semplice:

$$(\mathrm{Ad}\, g)\, X = g \cdot X \cdot g^{-1}$$

$$\left(= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \cdot \exp tX \cdot g^{-1} \right)$$

coniugio o coniugazione

Gruppo: $C_g h := g h g^{-1}$

H, sottogruppo di G, è normale $\Leftrightarrow$ è invariante per coniugazione

* Rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{g}$

$$(\mathrm{ad}\, X)\, Y := [X, Y]$$

verificare che $\mathfrak{g} \ni X \longmapsto \mathrm{ad}\, X \in \mathrm{End}\, \mathfrak{g}$

che è un'applicazione lineare (verifica immediata)

è effettivamente un morfismo di algebre di Lie, i.e.

$$\mathrm{ad}\, [X, Y] = [\mathrm{ad}\, X, \mathrm{ad}\, Y],$$

comm in $\mathfrak{g}$

commutatore operatoriale o, più concretamente, matriciale

$$\mathrm{ad}\, [X,Y]\, Z = [[X,Y], Z] = -[Z,[X,Y]]$$

$$[\mathrm{ad}\, X, \mathrm{ad}\, Y]\, Z = \mathrm{ad}\, X \cdot \mathrm{ad}\, Y\, Z - \mathrm{ad}\, Y \cdot \mathrm{ad}\, X \cdot Z$$

$$= [X,[Y,Z]] - [Y[X,Z]] = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]]$$

$\Rightarrow$ l'asserto, per Jacobi*.

È immediato verificare che (lavoriamo in $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$ o $\mathbb{C}$)

$$\underset{\overset{\shortparallel}{[X,Y]}}{\mathrm{ad}\, X \cdot Y} = \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(e^{tX}) Y \Big|_{t=0}$$

infatti $\frac{d}{dt}(e^{tX} Y e^{-tX}) = e^{tX} \cdot X Y e^{-tX}$

$$+ \; e^{tX} Y e^{-tX} \cdot (-X)$$

in $t=0$ è $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\quad) = XY - YX = [X,Y]$

variante $e^{tX} = 1 + tX + o(t)$, $e^{-tX} = 1 - tX + o(t)$

$$(1+tX+..)\, Y\, (1-tX+..) = Y + t\underbrace{[X,Y]}_{\mathrm{ad}_X Y} + \cdots$$

da cui l'asserto.

Nel caso generale, il calcolo va condotto come segue:

$$\mathrm{Ad}(\exp tX)\, Y_e = (R_{(\exp -tX)})_* (L_{\exp tX})_* Y_e$$

$$= (R_{\exp -tX})_* Y_{\exp(tX)}$$

$$= \underbrace{(\theta^X_{-t})_* Y_{\theta^X_t(e)}}_{\diamond} . \quad \text{Ma } \frac{d}{dt}(\diamond)\Big|_{t=0}$$

è precisamente $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$, calcolata in e, da cui l'asserto

$\theta^X_t(g) =$

$g \cdot \theta^X_t(e)$

$= R_{\exp tX} \cdot g$

si ricordi...

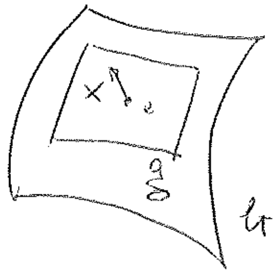
* Ancora sull'interpretazione di $[X,Y]$

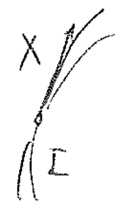
$$G = Gl_+(n, \mathbb{R}) \qquad e = I$$

$$\mathfrak{g} = gl(n, \mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ni X \qquad [\,,\,] = \text{commutatore}$$

$$g_X = I + tX + o(t)$$

$g_X = g_X(t)$ curva in G con velocità $\dot{g}_X(0) = X$





(campo vettoriale fondamentale)

$$X^\#\big|_A = A\cdot X = A\cdot X^\#\big|_I$$

$A \in Gl_+(n,\mathbb{R})$

campo vett. invariante a sinistra

in particolare $g_X = e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2}{2}X^2 \ldots$

s. gruppo ad un parametro generato da X

$$\dot{g} = g\cdot X$$

$$g^{-1}\dot{g} = X$$

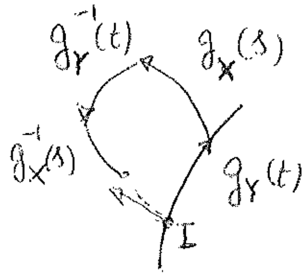
$g^{-1}dg \equiv$ forma di Maurer Cartan: τ inv. a sinistra in cost

$$(hg)^{-1}d(hg) = g^{-1}h^{-1}h\,dg = g^{-1}dg$$

Calcoliamo

molt. $\equiv$ azione sinistra di G su se stesso

$$g_X^{-1}\cdot g_Y^{-1}\cdot g_X\cdot g_Y$$



$$= (g_Y\cdot g_X)^{-1} g_X\cdot g_Y$$

$$g_X\cdot g_Y = (I + sX + \ldots)(I + tY + \ldots) = I + sX + tY + stXY + \ldots$$

$$g_Y\cdot g_X = I + sX + tY + st\,YX$$

$$(g_Y\cdot g_X)^{-1} = I - sX - tY + st\,YX$$

⚠

(serie geometrica $(1+\xi)^{-1} = 1 - \xi + \xi^2 + \ldots$

t, s piccoli

$$(g_Y \cdot g_X)^{-1}(g_X \cdot g_Y) = \dots$$

$$I + st\,(XY - YX) + \dots =$$

$$= I + st\,[X,Y] + \dots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\left(\qquad \right)\Bigg|_{\substack{s=0\\ t=0}} = [X,Y], \quad \text{commutatore}$$

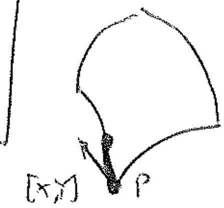
$$= [X,Y]_{\text{Lie bracket}}$$

[si può anche porre $s \rightsquigarrow \sqrt{s}$, $t \rightsquigarrow \sqrt{s}$ $\qquad s > 0$

e alla fine $\dots \; I + s[X,Y] + \dots$

$[X,Y]_{Lie}$ misura la non commutatività dei due flussi, a livello infinitesimale

in generale



$[X,Y]$ p

vettore tangente a Γ in p

$$\mathfrak{g} \cong Lie(G) \qquad \text{come algebre di Lie}$$

$[\,,\,]$ commutatore $\qquad [\quad,\quad]$ Lie bracket

lavorando in coordinate come prima, si conclude facilmente.

$X \rightsquigarrow \xi^i \partial_i$

$Y \rightsquigarrow \eta^j \partial_j$

4 Digressione su $SO(3)$ [è possibile una trattazione esaustiva tramite l'impiego dei quaternioni, ma per ora ci accontenteremo di alcune osservazioni preliminari]

$$SO(3) = \{ O \in M_3(\mathbb{R}) \ / \ \underbrace{O^T O = O^T O = I_3}_{O(3)} , \ \det O = +1 \}$$

gruppo ortogonale speciale

$O \in O(3) \iff O$ conserva il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$:

infatti

$$\langle x, y \rangle = x^T y = x^T I_3 y \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle Ox, Oy \rangle = (Ox)^T Oy = x^T O^T O y$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$\langle x, y \rangle \quad \forall x, y \iff O^T O = I_3 \quad (*)$$

Si ha, necessariamente $\det O = \pm 1$: la $(*)$ infatti porge

$$1 = \det O^T O = \det O^T \cdot \det O \quad (\text{Binet})$$
$$= (\det O)^2 .$$

Leggendo O come elemento di $U(3)$ (gruppo unitario di $\mathbb{C}^3$: $U(3) = \{ U \in M_3(\mathbb{C}) \ / \ U^T U = U U^T = I_3 \}$)

è $\det O = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ (autovalori)

da $\| O v \| = \| v \|$ ($v \in \mathbb{R}^3$ o $v \in \mathbb{C}^3$, con le norme rispettive) segue che se $O v = \lambda v$, $v \neq \underline{0}$ (v autovettore), è $|\lambda| = 1$.

Ora, P_C^O è un polinomio reale di 3° grado, dunque ammette una radice reale $(= \pm 1)$ e due radici complesse coniugate $e^{\pm i\alpha}$, in generale

polinomio caratteristico di O

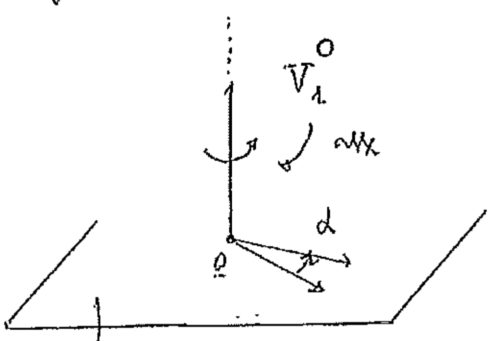
da $\det O = 1$ segue che una delle radici vale $+1$;

Escludendo il caso banale (ponendoci in forma diagonale; ciò è possibile in generale in $\mathbb{C}^3$) $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{I_3}$, abbiamo un autospazio unidimensionale, in $\mathbb{R}^3$, corrispondente a $\lambda = 1$

Identità

Si giunge, per via algebrica, al teorema di Eulero:

ogni elemento di $SO(3)$ è una rotazione attorno ad un asse (l'autospazio). L'angolo di rotazione α (previa scelta di un'orientamento dell'asse) si ottiene calcolando gli autovalori (il pol. caratteristico ha sempre una radice $\lambda = 1$, le altre si ottengono dal polinomio di 2° grado ottenuto dividendo per $\lambda = 1$ ...)



piano di rotazione $(V_1^0)^\perp$

altro metodo: preso $v \in (V_1^0)^\perp$,

si ha $\cos\alpha = \langle v, Ov \rangle$

Sia ora $\mathbb{R} \ni t \mapsto R(t) \in SO(3)$

una f. liscia tale che $R(t+s) = R(t)R(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

(sottogruppo ad un parametro di $SO(3)$: si noti che R definisce un omomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{R}, +)$ e $(SO(3), \cdot)$ molt.)

Si ha $R(0) = R(0)R(0) \Rightarrow R(0) = I$

Si fissi s. Calcoliamo

$$\frac{R(t+s)-R(s)}{t} = \frac{R(t)\,R(s)-R(s)}{t} =$$

$$= \frac{(R(t)-I_3)\,R(s)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} R'(0)\,R(s)$$

ossia $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{R'(s) = \underbrace{R'(0)}_{A}\,R(s) \qquad R(0)=I}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R(s) = \exp sA}$$

Si noti che $R'(0)=A$ è antisimmetrica:

$$\boxed{A^T + A = 0 \qquad (*)}$$

infatti da $R^T R = I$ segue

$$(R^T)'R + R^T R' = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (R')^T R + R^T R' = 0$$

e, calcolando in $t=0$ (e dato che $R(0)=I_3$)

si arriva a $(*)$.

A è detto generatore infinitesimale del gruppo ad un parametro

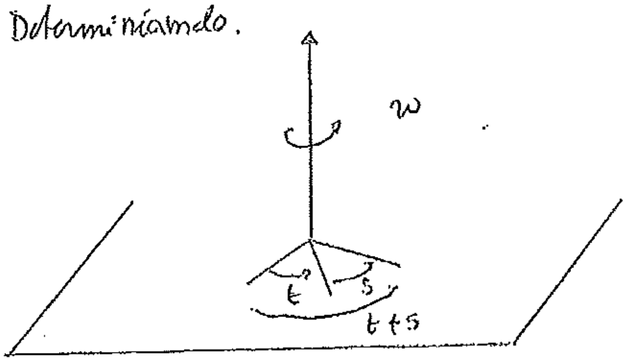
[Le matrici antisimmetriche costituiscono l' algebra di Lie di $SO(3)$..]

In forma equivalente: sia $\xi_0 \in \mathbb{R}^3$ un vettore generico. Posto $\xi(t) := R(t)\xi_0$ (sicché $\xi(0) = \xi_0$), si ha $\overset{\circ}{\xi}(t) = \dot{R}(t)\xi_0 = A\,R(t)\xi_0 = A\,\xi(t)$

$$(\diamond) \qquad \overset{\circ}{\xi} = A\,\xi \qquad\qquad \xi(0) = \xi_0$$

$$\Rightarrow \qquad \xi(t) = \exp(tA)\,\xi_0$$

Si noti che, geometricamente, le $R(t)$ (tra loro commutanti) sono rotazioni attorno ad un medesimo asse. Determiniamolo.



Poniamo $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T = -A$

$\det A = \det(-A^T)$
$= (-1)^3 \det(A^T) =$
$= -\det A$
$\Downarrow$
$\det A = 0$

sia $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{array}{l} r(A) = 2 \\ \text{rango} \\ \text{chiaro...} \rightsquigarrow \end{array} \right.$

$r(A) = 2 \Rightarrow \nu(A) = 3 - 2 = 1$
Si trova subito $\quad \ker A = \langle w \rangle \qquad A\,w = \underline{0}$
e w è l'asse di rotazione cercato : $(\exp tA)\,w =$
$(1 + tA + \ldots)\,w = w + t\underbrace{A\,w}_{=\underline{0}} + \underbrace{\ldots}_{=0}$

La $(\star)$ può vedersi anche nel modo seguente:

posto $\underline{\xi} = \xi_1 \underline{i} + \xi_2 \underline{j} + \xi_3 \underline{k}$

$\underline{w} = w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}$ . . è

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{w} \times \underline{\xi} \qquad (\text{e} \quad \underline{\xi}(0) = \underline{\xi}_0)$$

$\times$: prodotto vettoriale :

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} \begin{vmatrix} w_2 & w_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} w_3 & w_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i} \left[w_2\xi_3 - w_3\xi_2 \right] + \underline{j} \left[w_3\xi_1 - w_1\xi_3 \right] + \underline{k} \left[w_1\xi_2 - w_2\xi_1 \right]$$

D'altro canto $A\xi = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} w_2\xi_3 - w_3\xi_2 \\ w_3\xi_1 - w_1\xi_3 \\ w_1\xi_2 - w_2\xi_1 \end{pmatrix}$$, da cui l'asserto.

|| Il vettore geometrico $\underline{w}$ è chiamato vettore <u>velocità angolare</u>.

Approfondimento

risolviamo, in generale, il seguente problema di Cauchy

$$\star \qquad \boxed{R'(t) = A(t)\,R(t) \qquad R(0) = R_0 = I}$$

(famiglia di rotazioni con asse variabile...)

$\omega = \omega(t)$

$$\left(\underset{\sim}{\xi}' = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\xi} \; \ldots \right)$$

non $\int$

Si può far vedere che

$$R(t) = I + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_m \le t} A(t_m)\,A(t_{m-1}) \ldots A(t_1)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_m$$

spesso chiamato <u>integrale iterato di Chen</u>

$$\equiv \quad \exp\left(: \int_0^t A(x)\,dx : \right)$$

$: \;$ notazione di Wick

la serie converge...

$\star$ esponenziale a <u>tempo ordinato</u>

[cui si può dar senso anche come "<u>integrale prodotto</u>" alla Volterra

$$\prod_0^t e^{A(x)\,dx}$$

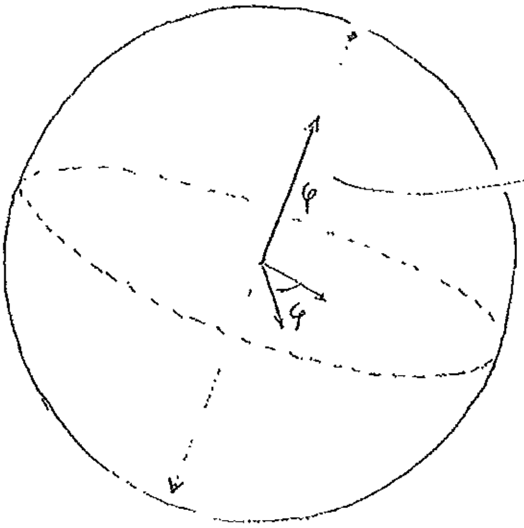
cf. l'identità di <u>Eulero</u>

$$\left[\, e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \,\right]$$

La $\star$, e la relativa soluzione, sussistono in contesti molto generali...

Notiamo infine, che, come spazio topologico, SO(3) può vedersi come $\mathbb{RP}^3$ (spazio proiettivo reale)

Sfera (piena) di raggio $R=\pi$ con i pti antipodali del bordo identificati (+)



asse di una rotazione generica, di angolo φ opportunamente orientato; se $\varphi = \pm\pi$, si ottiene la stessa rotazione

(+)

Diamo qualche dettaglio in più: $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{RP}^3 = S^3/\sim$ (sfera tridimensionale in $\mathbb{R}^4$)

$\sim$: identificazione dei pti antipodali

$$S^3 = \{ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \} \qquad \sim : \; x_i \leftrightarrow -x_i$$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = \overbrace{1 - x_3^2}^{R} \geq 0$$

se $x_3 = 0$, $x_i \sim -x_i$ $i = 0,1,2$.

altrimenti $x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 = R^2$, $0 \leq R < 1$

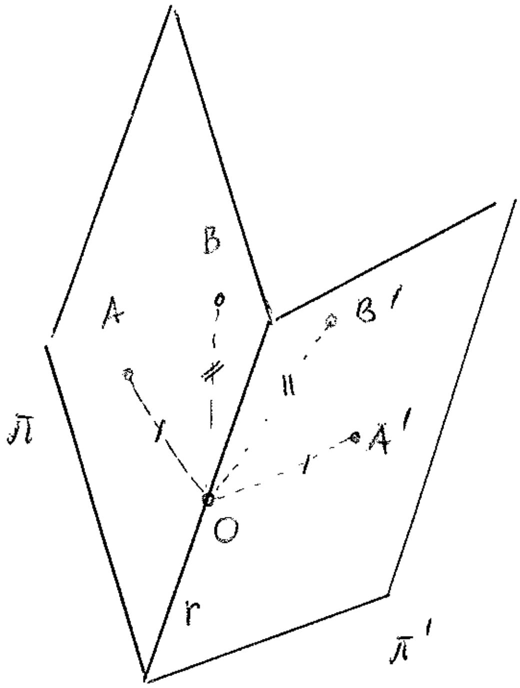
(senza vincoli ulteriori)

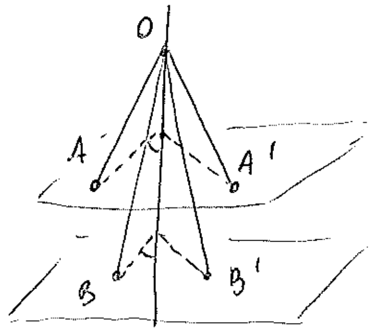
inciso

*** Il teorema di Eulero

per via sintetica

Sia fisso un movimento rigido (conservante l'orientamento) muta π = piano AOB in π' = piano $A'OB'$ e si conservano le distanze.

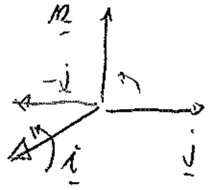




il movimento dato è pertanto una rotazione attorno a $r = \pi \cap \pi'$, su piani $\perp r$

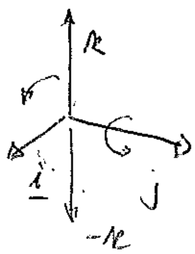
✶ $(\mathbb{R}^3, \times) \underset{\text{alg. Lie}}{\cong} (\mathfrak{so}(3), [\ ,\ ]) \quad (\cong (\mathfrak{su}(2), [\ ,\ ]))$

$$(\omega_1\ \omega_2\ \omega_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

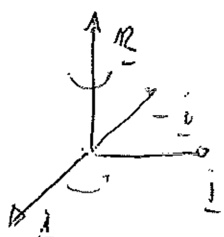
$\underline{i} = (1, 0, 0) \mapsto$  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: X_1$

$$= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \Bigg|_{t=0}$$

$\underline{i} \mapsto \underline{i}$
$\underline{j} \mapsto \underline{k}$
$\underline{k} \mapsto -\underline{j}$

$\underline{j} = (0, 1, 0) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_2$ 

$\underline{i} \mapsto -\underline{k}$
$\underline{j} \mapsto \underline{j}$
$\underline{k} \mapsto \underline{i}$

$\underline{k} = (0, 0, 1) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: X_3$ 

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k} \qquad [X_1, X_2] = X_3$

etc. ecc.

$\underline{i} \mapsto \underline{j}$
$\underline{j} \mapsto -\underline{i}$

costanti di struttura (v. oltre)

✶ tensore di Levi-Civita $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{due indici uguali} \\ 1 & \binom{1\,2\,3}{i\,j\,k} \text{ pari} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\downarrow$ Costanti di struttura di un'algebra di Lie (dim finita)

(X_i) base di $(L, [\,,\,])$

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$$ (Einstein..)

costanti di struttura : non dipendono dalla base scelta, nel senso seguente

Sia $T \in \mathrm{End}\, L$, $T[X,Y] = [TX, TY]$ (omomorfismo)

Si ponga $Y_i = TX_i$

Allora $[Y_i, Y_j] = [TX_i, TX_j] = T([X_i, X_j]) =$

$$= T(C_{ij}^k X_k) = C_{ij}^k T X_k = C_{ij}^k Y_k$$

Esercizio: scrivere l'identità di Jacobi in termini di $\{C_{ij}^k\}$

Sol: $[X_i[X_j, X_k]] + [X_j[X_k, X_i]] + [X_k[X_i, X_j]] = 0$

$[X_i, C_{jk}^l X_l] + [X_j, C_{ki}^m X_m] + [X_k, C_{ij}^n X_n] = 0$

$C^l{}_{jk} C^p_{il} X_p + C^m{}_{ki} C^p_{jm} X_p + C_{ij}{}^n C^p_{kn} X_p = 0 \quad \forall p$

$\sum_l$ sottintesa (Einstein)

$$\boxed{C^l_{jk} C^p_{il} + C^l_{ki} C^p_{jl} + C^l_{ij} C^p_{kl} = 0} \quad \forall p, \forall i, j, k$$

Rappresentazione aggiunta di $so(3)$ su se stessa
e in generale

$$\mathrm{ad}\, X \cdot Y = [X, Y]$$

$$\mathrm{ad}\, X_i \cdot X_j = [X_i, X_j] = C_{ij}^{k} X_k$$

★ costanti di struttura ⤳ matrice della rappresentazione aggiunta

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k$$

$$[X_1, X_1] = 0$$
$$[X_1, X_2] = X_3$$
$$[X_1, X_3] = -X_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice trovata prima!

$$\mathrm{ad}\, X_1 = X_1$$

ecc.