Tutoraggio Analisi II

a.a. 2012/2013

dott.ssa Saoncella Silvia
(silvia.saoncella_3@studenti.univr.it)

Lezione del 26/10/2012

Equazioni a Variabili Separabili

Sono equazioni del tipo

$$y' = g(t) \cdot h(y) \quad (*)$$

dove g è una funzione continua della variabile t su $I \subseteq \mathbb{R}$ e h è una funzione continua della variabile y su $J \subseteq \mathbb{R}$.
Se $h(\bar{y}) = 0$, ovvero $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è uno zero di h, allora la funzione costante $y(t) \equiv \bar{y}$ è un INTEGRALE PARTICOLARE di $(*)$ poiché l'equazione diventa $0=0$.

Supponiamo $h(y) \neq 0$, allora possiamo scrivere $(*)$ come

$$\frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dt} = g(t).$$

Indichiamo con $H(y)$ una primitiva di $\frac{1}{h(y)}$ e applichiamo la formula di derivazione di una funzione composta. Abbiamo

$$\frac{d}{dt} H(y(t)) = \frac{dH}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dt} = g(t).$$

pertanto abbiamo trovato che $H(y(t))$ è una primitiva di $g(t)$.
Quindi se $G(t)$ è una qualunque primitiva di $g(t)$, si avrà

$$H(y(t)) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (**)$$

Per ipotesi, si ha che la funzione $\frac{1}{h(y)} = \frac{dH}{dy}$ non si annulla e quindi, essendo continua non cambia di segno. La funzione $H(y)$ sarà strettamente monotona e dunque invertibile.

Pertanto si potrà esplicitare la $y(t)$ in (**) ottenendo

$$y(t) = H^{-1}(G(t)+c). \quad (***)$$

Tale espressione rappresenta l'INTEGRALE GENERALE dell'equazione (*) in ogni intervallo in cui la funzione $h(y(t))$ non si annulla.

In generale per le equazioni a variabili separabili vale il seguente

TEOREMA (di esistenza ed unicità).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = g(t) \cdot h(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con g continua in un intorno I di t_0 e h continua in un intorno J di y_0.
Allora esiste un intorno $I' \subset I$ di t_0 e una funzione continua y definita su I' con derivata continua su I' che è soluzione del problema.
Inoltre se anche h' è continua su J, allora tale soluzione è unica.

ESEMPIO

Risolvere l'equazione

$$y' = y(1-y) \quad (*)$$

In questo caso si ha che $g(t) = 1$ mentre $h(y) = y(1-y)$.
Abbiamo due integrali particolari $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_2 = 1$.
Supponiamo $h(y) \neq 0$ e riscriviamo (*) come

$$\frac{dy}{y(1-y)} = dt$$

e passando agli integrali indefiniti abbiamo

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dt$$

Integrando a sx rispetto a y e a dx rispetto a t, otteniamo

$$\log \left| \frac{y}{1-y} \right| = t + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Passando agli esponenziali, abbiamo

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{t+c_1} = k e^t$$

dove $k = e^{c_1}$ è una qualunque costante positiva.
Pertanto

$$\frac{y}{1-y} = \pm k e^t = \tilde{k} e^t \qquad \tilde{k} \in \mathbb{R}$$

Ricavando y in funzione di t si ha

$$y(t) = \frac{\tilde{k} e^t}{1+\tilde{k} e^t} = 1 - \frac{1}{1+\tilde{k} e^t}$$

Ricaviamo ora il ritratto di fase. Facciamo un piccolo studio di funzione:

Si ha che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$$

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$$

La funzione valutata in zero vale $y(0) = 1 - \frac{1}{1+\tilde{k}}$, mentre la derivata prima vale

$$y'(t) = \frac{\tilde{k} e^t}{(1+\tilde{k} e^t)^2} \begin{cases} >0 & \text{se } \tilde{k} > 0 \\ <0 & \text{se } \tilde{k} < 0 \end{cases}$$

Consideriamo poi

$$t = \log\left|\frac{y}{1-y}\right| + c_1$$

si ha che

per $y \to +\infty$ $\quad t \to c_1$

per $y \to -\infty$ $\quad t \to c_1$

per $y \to 0^-$ $\quad t \to -\infty$

per $y \to 1^+$ $\quad t \to +$

Quindi il ritratto di fase è