lunedì 3 marzo 2014 09.26

- ROBERTO BERTELLE

roberto.bertelle@unipd.it

- LEZIONI

Lunedì: 9:30 ÷ 11:30 (teoria)
Mercoledì: 14:30 ÷ 18:30 (teoria + laboratorio)

- ESAME

SCRITTO + COLLOQUIO

↳ Esercizi + domande a risposta chiusa (scegliere tra più alternative quella/e corrette)

CALCOLATRICE OK!

TESTO OK!

6 APPELLI (SCRITTO + COLLOQUIO) DUE PER SESSIONE.

- TESTO

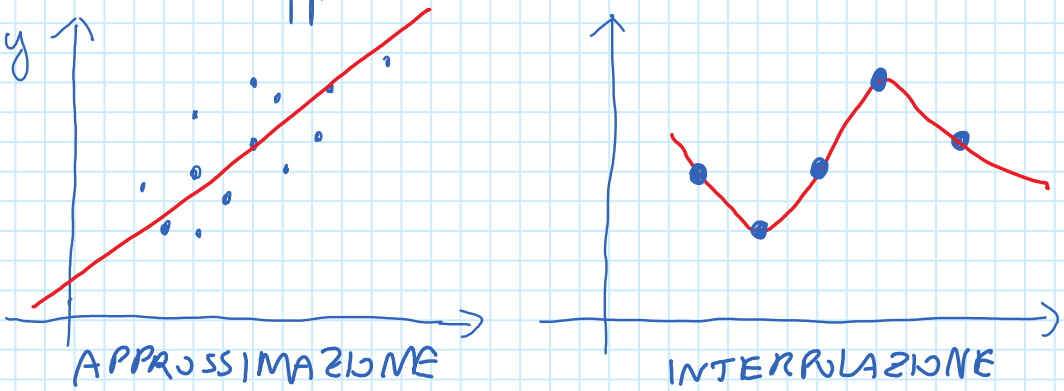
1) G. ZILLI, L. BERGAMASCHI "Calcolo Numerico", Progetto Padova, 2013
2) L. BERGAMASCHI "Esercizi ..."
Progetto Padova, 2014
3) Appunti delle lezioni.
Disponibile (a metà settimana) LIBRERIA CORTINA, Borgo Roma.

- RICEVIMENTO: su appuntamento.

- TUTOR

- PROGRAMMA (INDICATIVO)

1) Aritmetica di macchina
2) Radici di equazioni NON lineari.
   $\sin(x) - x = 0 \Rightarrow$ trovare x.
3) Sistemi lineari
   $A\underline{x} = \underline{b}$ con A matrice quadrata
4) Interpolazione e approssimazione di dati



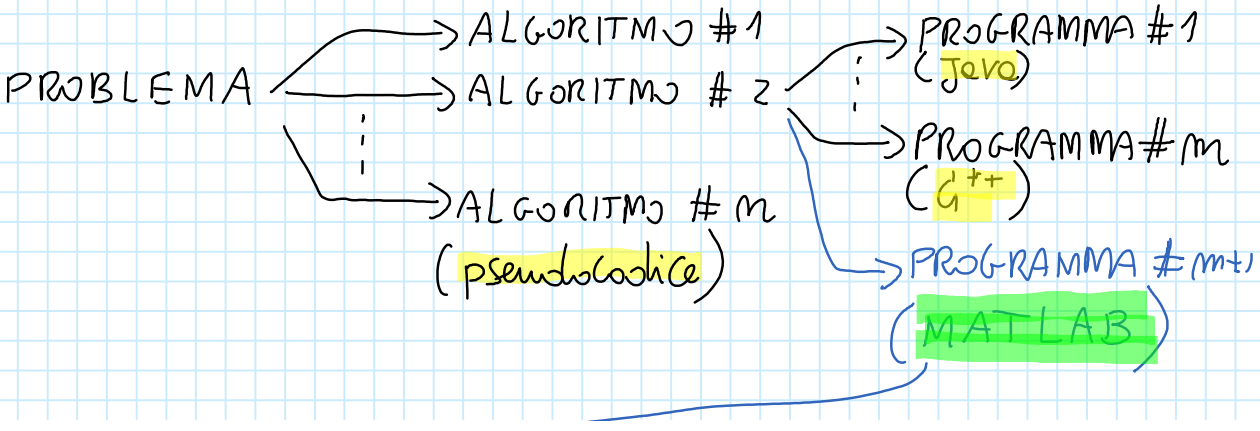
5) Integrazione numerica

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

$$\int_0^{\pi} e^{x^2}\,dx = \text{NON RIESCO A FARLO!!}$$

Imparerò a trovare un valore approssimato!

6) Laboratorio di calcolo numerico
Vogliamo algoritmi che si possono usare "in pratica"

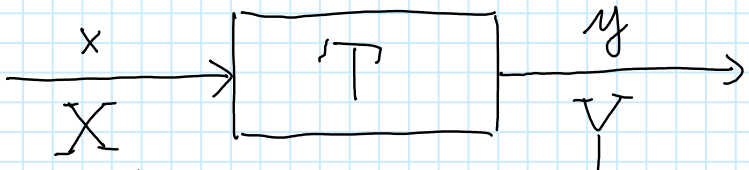


(MATLAB)

→ software commerciale!
- a) in cui
- a) comprare versione per studenti (circa 100 €).
- a) ....
- a) OCTAVE: versione simile a Matlab (gratis)

ARITMETICA DI MACCHINA (computer)

Un problema matematico può essere visto come una trasformazione T tra due spazi vettoriali X e Y:



(spazio dei DATI) (spazio dei RISULTATI)

Assumiamo, inoltre, che sia in X che in Y siano definite delle norme, indicate con $\|\cdot\|$ e quindi delle distanze tra i vettori; ad esempio, se $x_1, x_2 \in X$, la loro distanza è

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|.$$

I problemi matematici possono, alla buona, inquadrarsi in tre tipi:

1) PROBLEMI DIRETTI: noti T e $a \in X$, vogliamo trovare $b \in Y$ tale che $b = T(a)$ (voglio calcolare $T(a)$).

Esempio: Sia $T(x) = f(x) = x^3 + x - 1$. Voglio calcolare $f(1)$.

Esempio: Sia $T(x) = Ax$ con A matrice quadrata. Dato $a \in \mathbb{R}^n$

voglio calcolare

$$b = A \cdot a$$

2) PROBLEMI INVERSI: noti T e $b \in Y$, vogliamo trovare $a \in X$ tale che $T(a) = b$.

Esempio Sia $T(x) = f(x) = x^3 + x - 1$. Sia $b = 0$. Voglio trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) = 0$ ossia risolvere l'equazione di 3° grado

$$a^3 + a - 1 = 0.$$

Esempio Sia $T(x) = Ax$, A matrice quadrata di ordine n. Dato $b \in \mathbb{R}^n$ voglio trovare $a \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$A \cdot a = b.$$

Facile se n è piccolo! Ma, cosa succede se $n = 10^6$?

I problemi inversi sono MOLTO FREQUENTI e, di solito, DIFFICILI DA RISOLVERE.

3) PROBLEMA DI IDENTIFICAZIONE: dotati una famiglia $\{(x_i, y_i),\ i = 1, \dots, p\}$ di dati x_i di ingresso ed i corrispondenti y_i di uscita si tratta di trovare la trasformazione T che lega gli x_i agli y_i.

Tipicamente, la T appartiene ad una famiglia di possibili trasformazioni.

Esempio. Consideriamo un reattore chimico nel quale i reagenti A e B si combinano per dare il prodotto G. Supponiamo di avere le misure delle concentrazioni di G al variare del

tempo per certi istanti di tempo t_i:

$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_m$ (ingresso)

$C_0 \quad C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_m$ (uscita)

Voglio la legge (cioè T) che descrive la concentrazione di C al variare del tempo usando le misure che abbiamo.

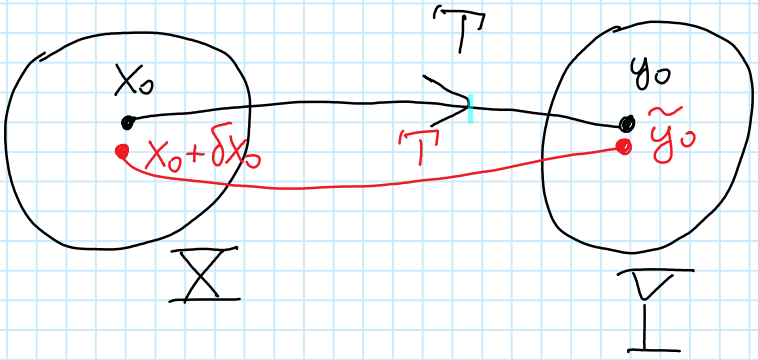
Ipotizziamo la famiglia dove cercare T; l'esperienza (nei processi chimici) suggerisce, come famiglia,

$$\mathcal{F} = \{T(x) = a + b e^{\lambda x}, \; x \geq 0\}$$

dove x è il tempo e $T(x)$ la concentrazione di C. Si tratta di trovare a, b, λ per avere T.

I problemi di IDENTIFICAZIONE sono anche detti problemi di COSTRUZIONE DI MODELLI MATEMATICI.

PROBLEMI BEN CONDIZIONATI E MAL CONDIZIONATI



Il problema è detto

→ BEN CONDIZIONATO in corrispondenza del dato x_0 se per ogni "piccola" (matematicamente: infinitesima) perturbazione ammissibile δx_0 si ha che $\tilde{y}_0 = T(x_0 + \delta x_0)$ NON è troppo lontano da $y_0 = T(x_0)$.

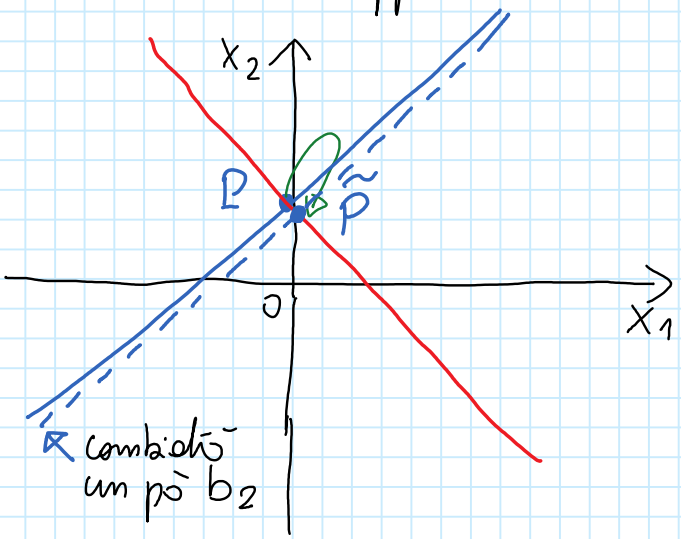
→ MAL CONDIZIONATO in corrispondenza del dato x_0 se esiste almeno una piccola perturbazione ammissibile δx_0

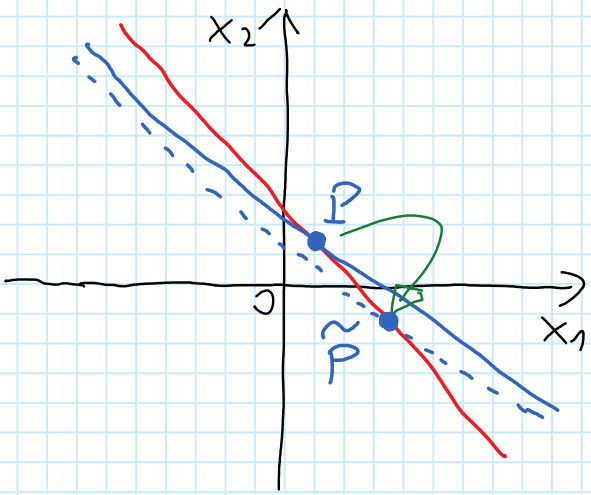
→ MAL CONDIZIONATO in corrispondenza del dato x_0 se esiste almeno una piccola perturbazione ammissibile δx_0 tale che $\tilde{y}_0 = T(x_0 + \delta x_0)$ è lontano da $y_0 = T(x_0)$.

ESEMPIO Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$

e rappresentiamo nel piano (x_1, x_2) le due equazioni (rette) in due situazioni opposte come comportamento





Ben condizionato: la piccola perturbazione sui dati (in questo caso, solo su b_2) ha dato una piccola variazione della soluzione perché $\tilde{P}$ è vicino a P

Mal condizionato: la piccola perturbazione ha dato una grande variazione perché $\tilde{P}$ è lontano da P.