Esercizi di Programmazione Lineare - Dualità

Esercizio n.1

Dato il seguente problema

$$\begin{cases} \min(-3x_1 - x_2), \\ x_1 + 3x_2 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases},$$

a) scriverne il duale;
b) risolvere il duale (anche geometricamente) indicando cosa da esso si può dedurre sul problema dato.

Esercizio n.2

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min(-2x_1 + cx_2), \qquad c \in R \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \ge 0 \quad i = 1,...5 \end{cases}$$

Rappresentare la regione ammissibile del problema nel piano (x_1, x_2).
a) Dire se il problema dato ha soluzioni di base degeneri oppure no.
b) Determinare la tabella del simplesso relativa alla soluzione che ha in base le componenti x_1, x_2, x_3.
c) Per quali valori di $c \in R$ la soluzione di base di cui al punto b) è soluzione ottima del problema dato?
d) (facoltativo) Scrivere, per $c = -1$, il duale del problema dato e determinare una sua soluzione ottima.

Esercizio n.3

Si consideri il seguente sistema:

$$S: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 + k \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 8 \\ x_1 \ge 0 \quad i = 1,\dots,5 \end{cases}$$

a) Applicare la Fase I dell'algoritmo del simplesso per determinare i valori di k∈R per i quali esistono soluzioni del sistema S.
b) Posto k = 22/3, determinare tutte le soluzioni di base di S, specificando se sono degeneri o no.
c) Posto k = 6, risolvere con l'algoritmo del simplesso il problema che consiste nel minimizzare la funzione $-x_1 + x_2$ sull'insieme delle soluzioni di S.

Esercizio n.4
Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min(2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4), \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -\mathbf{3} \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases} .$$

a) Risolvere il duale del problema dato.
b) Utilizzare la soluzione del problema duale per risolvere il primale.

Esercizio n.5
Dato il problema di Programmazione Lineare

$$P : \begin{cases} \min(c_1x_1 + c_2x_2) \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad = b_1 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = b_2 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

determinare c_1, c_2, b_1, b_2 in modo che siano verificate entrambe le condizioni:
i) (1,0,1,0) e (1/2,1/4,1/4,0) sono soluzioni ottime di P;
ii) (0,-1) è soluzione ottima del duale di P.

Esercizio n.6
Si consideri il seguente problema:

$$P: \begin{cases} \min(c_1x_1 + c_2x_2) \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

a) Scrivere il duale di P;
b) dire se esistono valori di c_1, c_2 per i quali il duale di P non ha soluzioni ottime finite;
c) dire per quali valori di c_1, c_2 il duale di P ha regione ammissibile vuota;
d) posto c_1=2 e c_2=1, risolvere geometricamente il problema P. Successivamente trovare la soluzione ottima del problema duale, sfruttando il teorema degli scarti complementari.

Esercizio n.7
Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$P: \begin{cases} \min(c_1x_1 + c_2x_2) \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq k \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} , \qquad k \geq 0.$$

a) Dire per quali valori di k il problema ha soluzioni di base degeneri e in tal caso determinarle;
b) studiare al variare di c_1, $c_2 \in$R e di $k \geq 0$ l'esistenza di soluzioni ottime finite del duale di P;
c) posto $k = 6$, dire per quali valori di c_1 e c_2 la soluzione $(x_1,x_2) = (5,1)$ è soluzione ottima unica di P e per quali valori di c_1 e c_2 è soluzione ottima non unica;
d) posto $k = 6$, $c_1 = -2$ e $c_2 = -1$, risolvere il problema P.

Esercizio n.8

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\text{P:} \begin{cases} \min(cx_1 + x_2) \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \leq k \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Determinare un valore di $k \in R$ per cui il problema P ha (almeno) una soluzione di base degenere e in corrispondenza di una tale soluzione determinare tutte le matrici di base associate;
b) determinare i valori di k per cui la regione ammissibile di P è vuota;
c) determinare i valori di k per cui il secondo vincolo è ridondante;
d) posto $k = 1$, determinare i valori di c per cui la soluzione $(x_1, x_2) = (1,0)$ è soluzione ottima di P;
e) scrivere il duale di P e risolverlo per $k = 1$ e $c = -1/2$;
f) (facoltativo) se $k = -8$, esistono valori di $c \in R$ per cui il duale di P ha soluzioni ottime finite?

Esercizio n.9

Dato il problema

$$\text{P:} \begin{cases} \min(c_1x_1 + c_2x_2) \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 7 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,5 \end{cases}$$

a) rappresentare la regione ammissibile del problema nel piano (x_1, x_2). Dalla sola rappresentazione geometrica (quindi senza calcolarle) stabilire se P ha soluzioni di base degeneri oppure no;
b) calcolare tutte le soluzioni di base di P e verificare la correttezza della risposta data in a).
c) Esistono valori di c_1 e c_2 per cui P non ha soluzioni ottime finite?
d) Posto $c_1 = 2,\ c_2 = 1,$ risolvere P con l'algoritmo del simplesso.

Esercizio n.10

Scrivere il duale del seguente problema:

$$\begin{cases} \min(2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 4 \\ x_i \geq 0 \ i = 1,\dots,4 \end{cases}.$$

Risolvere geometricamente il problema duale e determinare la soluzione ottima del problema dato usando il teorema degli scarti complementari.

Esercizio n.11
Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\text{P:}\begin{cases} \min(-2x_1+4x_2) \\ 4x_1+x_2 \le 6 \\ 2x_1-4x_2 \le 3 \\ 2x_1-11x_2 \ge -11 \\ x_1,x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Rappresentare il problema geometricamente e successivamente scriverlo in forma standard.

a) Dire se il problema ha soluzioni di base degeneri ed in caso affermativo per ognuna di esse trovare tutte le basi associate.
b) Determinare la tabella del simplesso relativa alla soluzione che ha in base le componenti x_1, x_3 *e* x_5 e dimostrare che tale soluzione è ottima.
c) La soluzione ottima determinata al punto b) è unica? Giustificare la risposta sia facendo uso della tabella, sia geometricamente.
d) Scrivere il duale del problema P e risolverlo. La soluzione ottima del duale è unica? Se non è unica, determinare tutte le soluzioni ottime del duale.

Esercizio n.12
Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\text{P:}\begin{cases} \min(c_1x_1+c_2x_2) \\ x_1+ax_2 \le 3 \\ -x_1+2x_2 \le 4 \\ x_1,x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Porre $a=1/3$ nel problema P, scriverlo in forma standard e successivamente:
- determinare la soluzione di base $\overline{x}=(\overline{x}_B=(x_1,x_2),\overline{x}_N=(x_3,x_4))$;
- dire per quali valori del vettore *c* la soluzione di base $\overline{x}$ è l'unica soluzione ottima;
- determinare il vettore *c* in modo che $\overline{x}$ sia una soluzione ottima non unica di P. Verificare che esistono, a meno di una costante, due possibilità e dare di ciò una giustificazione geometrica nel piano.

b) Porre $c_1=-9, c_2=-3$ nel problema P;
- studiare, al variare di *a*, il comportamento delle soluzioni ottime di P;
- dire (senza risolverlo) per quali valori di *a* il duale di P ammette estremo finito e per quali ha regione ammissibile vuota.

Esercizio n.13
Si consideri il seguente problema:

$$P: \begin{cases} \min(x_1 + 4x_2 + 3x_4) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,4 \end{cases}$$

a) Risolvere P con l'algoritmo del simplesso duale.
b) Scrivere il duale di P, risolverlo geometricamente e usare la soluzione ottima del duale per determinare la soluzione ottima di P.
I due procedimenti usati in a) e in b) conducono alla stessa soluzione ottima?

Esercizio n.14
Dato il problema

$$P: \begin{cases} \min(3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = k \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,4 \end{cases},$$

dire per quali valori di $k \in R$ il problema P ha soluzioni ottime finite e per quali ha regione ammissibile vuota. Esistono valori di $k \in R$ per cui P non ha soluzioni ottime finite?

Esercizio n.15
Siano dati il problema

$$P: \begin{cases} \min z = (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5) \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,5 \end{cases},$$

la tabella T:

$-z$	5	3	1	0	0	3
x_4	7	0	7	0	1	2
x_3	2	-1	3	1	0	1
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

ed il vettore $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2) = (-1,-1)$.
a) Per quali valori di c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 T e' la tabella finale ottima del problema P e $\overline{\lambda}$ e' soluzione ottima del duale di P?
b) Nel problema P si ponga $c_1 = 9, c_2 = -18, c_3 = 2, c_4 = 1, c_5 = -5$. Risolvere il problema P così ottenuto con l'algoritmo del simplesso. Successivamente, trovare la soluzione ottima del duale di P.
c) Dimostrare che se $c_3 < -c_1$ allora P non ha soluzioni ottime finite.