Analisi Matematica 1 - 19 febbraio 2014

Esercizio 1

fila A $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$

$A = \mathbb{N}\setminus\{0\}$. $+\infty$ è di accumulazione per A

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|n|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

Verifica: occorre provare che $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ t.c. $\forall n\in\mathbb{N}^*, n>\nu_\varepsilon \quad \left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|<\varepsilon$

$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1>0$ perché $\sqrt{n^2+1}>n$ essendo $n^2+1>n^2$

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1<\varepsilon \iff \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}<\varepsilon \iff \frac{n^2+1-n^2}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\varepsilon$$

Proviamo che $\frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)} < \frac{1}{2n^2} < \varepsilon$

perché $\sqrt{n^2+1}>n$, quindi $\sqrt{n^2+1}+n>2n$

Basta scegliere $\nu > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$

---

fila B $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{n}$

$A = \mathbb{N}\setminus\{0\}$. $+\infty$ è di accumulazione per A

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|n|\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{n} = 1$$

Proviamo che $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ t.c. $\forall n\in\mathbb{N}^*, n>\nu_\varepsilon \quad \left|\frac{\sqrt{n^2+2}-1}{n}\right|<\varepsilon$

$\frac{\sqrt{n^2+2}}{n}-1>0$ perché $\sqrt{n^2+2}>n$

$$\frac{\sqrt{n^2+2}}{n}-1<\varepsilon \iff \frac{\sqrt{n^2+2}-n}{n}<\varepsilon \iff \frac{\sqrt{n^2+2}-n}{n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+2}+n}<\varepsilon$$

$$\iff \frac{\cancel{n^2}+2-\cancel{n^2}}{n(\sqrt{n^2+2}+n)}<\varepsilon$$

Proviamo che $\frac{2}{n(\sqrt{n^2+2}+n)} < \frac{2}{n(2n)} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

Basta scegliere $\nu > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$