Foglio 5

1 novembre 2012

Esercizio 1 (Punti 8)**.** Sia $L : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ l'applicazione definita da

$$L\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. Verificare che L è una applicazione lineare
2. Trovare una base del nucleo di L e dell'immagine di L.

Esercizio 2 (Punti 8)**.** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x,\ y,\ z)^T = (x + y + z,\ x - y + \alpha,\ (\alpha - 1)z)^T$$

1. per quali valori di α f_α è un'applicazione lineare?
2. per tali valori determinare il nucleo e l'immagine di f_α
3. per tali valori trovare la controimmagine mediante f_α di $(-1,\ 1,\ 1)^T$

Esercizio 3 (Punti 8)**.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $[x \quad y \quad z \quad t]^T \longmapsto [x + 2y - z + t \quad y - x + 2z \quad x - z - t]^T$.

1. Provare che f è un'applicazione lineare.
2. Determinare base e dimensione del nucleo e dell'immagine di f.
3. $v = [1 \quad 0 \quad -1 \quad -1]^T$ è un elemento del nucleo di f?
4. $w = [1 \quad 2 \quad 1]^T$ è un elemento dell'immagine di f?
5. Trovare tutti gli elementi $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = [1 \quad -1 \quad -1]^T$

Esercizio 4 (Punti 6)**.** Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - \alpha x_4 = 4 \end{cases}$$

1. si scriva il sistema nella forma matriciale $A_\alpha x = b_\alpha$ e si trovi lo spazio nullo $N(A_\alpha)$.
2. si verifichi che $(2 + \alpha,\ 0,\ 3 - \alpha,\ -1)^T$ è una soluzione del sistema $A_\alpha x = b_\alpha$
3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovino tutte le soluzioni del sistema $A_\alpha x = b_\alpha$
4. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovino le soluzioni del sistema $A_\alpha x = c_\alpha$, dove $c_\alpha = A_\alpha(i,\ \alpha^2,\ 0, -1)^T$