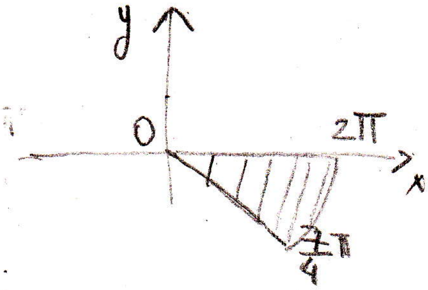
③ i) Calcolare, se $\exists$, $\iint_T xy\,dx\,dy$ ove

$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le 0,\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge -x\}$



ii) Enunciare il Teorema di integrabilità nel piano e le formule di riduzione degli integrali doppi.

Ris

ii) Teorema

Sia $C\subset\mathbb{R}^2$ chiuso limitato e misurabile. Sia $f: C\to\mathbb{R}$ limitata

Suppongo che $\exists\ E\subset C$ misurabile con area $E=0$ ed

f sia continua su $C\setminus E$

$\Rightarrow$ f è integrabile su T.

Teorema Formule di riduzione degli integrali doppi

Sia $f\in C^0(C\setminus E)$, $C\subset\mathbb{R}^2$, E sottoinsieme di C di area nulla.

Sia f limitata in C

a) Se $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$, φ, ψ continue

$$\Rightarrow \iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

b) Se $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: c\le y\le d\ \ \varphi(y)\le x\le\psi(y)\}$, φ, ψ continue

$$\Rightarrow \iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

i) $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le 0,\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge -x\}$ è un chiuso, limitato, misurabile del piano.

$T=T_1\cup T_2$ con T_1, T_2 normali rispetto all'asse x

oppure T è normale rispetto all'asse

$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -\frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le 0,\ -y\le x\le +\sqrt{1-y^2}\}$

f è integrabile su T perché f continua su T.

Usando coordinate polari di centro l'origine T è il trasformato di

$K=\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2: 0\le\rho\le 1,\ \vartheta\in[\frac{7\pi}{4}, 2\pi]\}$ secondo $\phi(\rho,\vartheta)=(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$

EX 3 foglio A parte 1