

Consideriamo

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_{ij} x_j^{(n)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, m$$

Osserviamo che quando calcoliamo $x_i^{(n+1)}$, le componenti

$x_1^{(n+1)}, \dots, x_{i-1}^{(n+1)}$ sono già state calcolate. Questo suggerisce di utilizzarle per calcolare $x_i^{(n+1)}$ perché ragionevolmente sono "più vicine" alle soluzioni esatte di $x_1^{(n)}, \dots, x_{i-1}^{(n)}$.
Sia il nuovo metodo iterativo

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, m$$

Si può dimostrare che questo metodo altro non è che Gauss-Seidel.

OSSERVAZIONE

Queste relazioni, componente per componente, sono utili nei casi

- uso un linguaggio di programmazione diverso di Matlab. In Matlab, basato sulle matrici, invece uso le forme matriciali; ad esempio, per Jacobi, siamo

$$\underline{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\underline{x}^{(k)} + D^{-1}\underline{b}$$

- per fare i conti corse e veloci.

È molto facile scrivere le equazioni dei metodi iterativi componente per componente. Vediamo come con un esempio.

$$\begin{matrix} A & \cdot & \underline{x} & = & \underline{b} \\ \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right) & \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} | & q_{31} & q_{32} & q_{33} & | & x_3 & | & b_3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} q_{11} x_1 + q_{12} x_2 + q_{13} x_3 = b_1 \\ q_{21} x_1 + q_{22} x_2 + q_{23} x_3 = b_2 \\ q_{31} x_1 + q_{32} x_2 + q_{33} x_3 = b_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - q_{12} x_2 - q_{13} x_3}{q_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - q_{21} x_1 - q_{23} x_3}{q_{22}} \\ x_3 = \frac{b_3 - q_{31} x_1 - q_{32} x_2}{q_{33}} \end{cases} \Rightarrow$$

JACOBI

$$\begin{cases} x_1^{(h+1)} = \frac{b_1 - q_{12} x_2^{(h)} - q_{13} x_3^{(h)}}{q_{11}} \\ x_2^{(h+1)} = \frac{b_2 - q_{21} x_1^{(h)} - q_{23} x_3^{(h)}}{q_{22}} \\ x_3^{(h+1)} = \frac{b_3 - q_{31} x_1^{(h)} - q_{32} x_2^{(h)}}{q_{33}} \end{cases}$$

GASS SEIDEL

$$\begin{cases} x_1^{(h+1)} = \frac{b_1 - q_{12} x_2^{(h)} - q_{13} x_3^{(h)}}{q_{11}} \\ x_2^{(h+1)} = \frac{b_2 - q_{21} x_1^{(h+1)} - q_{23} x_3^{(h)}}{q_{22}} \\ x_3^{(h+1)} = \frac{b_3 - q_{31} x_1^{(h+1)} - q_{32} x_2^{(h+1)}}{q_{33}} \end{cases}$$

TEST DI ARRESTO

Ne abbiamo 4 diversi (quelli più comuni)

1a) $\| \underline{x}^{(h+1)} - \underline{x}^{(h)} \| \leq \text{toll}$ (SCARTO ASSOLUTO)

1b) $\frac{\| \underline{x}^{(h+1)} - \underline{x}^{(h)} \|}{\| \underline{x}^{(h)} \|} \leq \text{toll}$ (SCARTO RELATIVO)

2a) $\| \underline{r}^{(h)} \| \leq \text{toll}$ (RESIDUO ASSOLUTO)

2b) $\frac{\| \underline{r}^{(h)} \|}{\| \underline{b} \|} \leq \text{toll}$ (RESIDUO RELATIVO)

dove

$$\underline{r}^{(k)} = \underline{b} - A \cdot \underline{x}^{(k)} \quad (\text{residuo al passo } k\text{-esimo})$$

coll è un numero positivo (piccolo, ad es. 10^{-6})

Questi criteri possono andare bene per certi sistemi lineari ma non per altri.

Vediamo l'efficienza dei criteri relativi basati su scarto e residuo.

CRITERIO BASATO SULLO SCARTO

La questione è la seguente:

Se fermo il metodo quando $\|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\| < \text{coll}$,
quanto vale l'errore (σ , meglio, una sua stima)
 $\|\underline{x} - \underline{x}^{(k)}\|$?

Ci serve un risultato delle norme delle matrici.

LEMMA Sia M una matrice quadrata di ordine n .
La matrice $I_n - M$ è invertibile se e solo se
 $\rho(M) < 1$.

In queste situazioni valgono le maggiorazioni

$$\frac{1}{1 + \|M\|} \leq \|(I_n - M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}$$

per ogni norma matriciale indotta con $\|M\| < 1$.

Consideriamo ($\underline{e}^{(k)} = \underline{x} - \underline{x}^{(k)}$)

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} &= \left(\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x} \right) + \left(\underline{x} - \underline{x}^{(k)} \right) = \\ &= -\underline{e}^{(k+1)} + \underline{e}^{(k)} = \\ &= -E \underline{e}^{(k)} + \underline{e}^{(k)} \quad \left(\text{essendo } \underline{x}^{(k+1)} = E \underline{x}^{(k)} + \underline{q} \right) \\ &= (I - E) \underline{e}^{(k)} \end{aligned}$$

Supponendo il metodo convergente, ossia $\rho(E) < 1$, la
matrice $I - E$ è invertibile e possiamo scrivere

$$\underline{e}^{(n)} = (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} (\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)})$$

Prendendo delle norme

$$\boxed{\|\underline{e}^{(n)}\|} = \|(\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \cdot (\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)})\| \leq$$

$$\leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1}\| \cdot \|\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}\| \stackrel{\text{LEMMA}}{\leq}$$

$$\leq \boxed{\frac{1}{1 - \|\mathbf{E}\|} \cdot \|\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}\|}$$

↪ fattore moltiplicativo

Per tanto

- se $\|\mathbf{E}\| \approx 0$ quando $\|\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}\| < \text{toll}$ lo pure $\|\underline{e}^{(n)}\| < \text{toll}$. Quindi, il criterio è buono.
- se $\|\mathbf{E}\| \approx 1$ quando $\|\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}\| < \text{toll}$ NON è detto che anche $\|\underline{e}^{(n)}\| < \text{toll}$ perché c'è un fattore moltiplicativo $\frac{1}{1 - \|\mathbf{E}\|}$ grande. In questa situazione il criterio di arresto $\|\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}\| < \text{toll}$ NON è buono.

CRITERIO SUL RESIDUO

Il metodo si arresta quando $\frac{\|\underline{r}^{(n)}\|}{\|\underline{b}\|} < \text{toll}$.

L'efficienza di questo criterio è legata al numero di condizionamento della matrice del sistema lineare $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$; vale infatti la relazione

$$\frac{\|\underline{e}^{(n)}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \boxed{\mathbf{K}(\mathbf{A})} \cdot \frac{\|\underline{r}^{(n)}\|}{\|\underline{b}\|}$$

↪ fattore moltiplicativo.

Quando $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ è grande, anche con $\|\underline{r}^{(n)}\|/\|\underline{b}\| < \text{toll}$ NON è garantito che sia $\|\underline{e}^{(n)}\|/\|\underline{x}\| < \text{toll}$.

Vediamo perché.

$$\underline{r}^{(n)} = \underline{b} - A \underline{x}^{(n)}$$

che posso rileggere come

$$A \underline{x}^{(n)} = \underline{b} - \underline{r}^{(n)}$$

Perciò, la soluzione $\underline{x}^{(n)}$ può essere vista come quella del sistema lineare $A \underline{x} = \underline{b}$ dove ho perturbato il termine noto di $\delta \underline{b} = -\underline{r}^{(n)}$. Dalle teorie sui sistemi lineari questo equivale ad avere una perturbazione sulla soluzione esatta $\underline{x}$ pari a $\delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^{(n)}$ che verifica

$$\begin{aligned} \frac{\|\underline{x} - \underline{x}^{(n)}\|}{\|\underline{x}\|} &\leq \overline{K}(A) \cdot \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} = \overline{K}(A) \cdot \frac{\|-\underline{r}^{(n)}\|}{\|\underline{b}\|} \\ &= \overline{K}(A) \cdot \frac{\|\underline{r}^{(n)}\|}{\|\underline{b}\|} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE Il metodo iterativo

$$\underline{x}^{(n+1)} = E \underline{x}^{(n)} + \underline{q} \quad (*)$$

converge, $\forall \underline{x}^{(0)}$, quando $\rho(E) < 1$. Non è semplice, però, calcolare $\rho(E)$. A volte si può stabilire la convergenza guardando la matrice A di $A \underline{x} = \underline{b}$ da cui è stato ottenuto il metodo iterativo (*).

Si può far vedere che

• A diag. dominante per righe o per colonne $\Rightarrow$ Jacobi e Gauss-Seidel convergono.

• A simmetrica definita positiva $\Rightarrow$ Gauss-Seidel converge.

Inoltre, se A è tridiagonale (ossia, le diagonali da zero, al più, gli elementi della diagonale principale e delle due diagonali adiacenti) anche Jacobi converge e a 2/3

$\rho(E_S) = [\rho(E_J)]^2$
 ossia $\rho(E_S) < \rho(E_J)$ per cui $\underbrace{\text{converge}}_{\text{Gauss-Seidel}}$ più rapidamente.

ESERCIZIO Ci sono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui il
 metodo di Jacobi applicato a $Ax = b$ con
 $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$
 è convergente?

Sicuramente, nonno bene tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $1 > |\alpha|$
 perché in questa situazione A è diag. dominante per righe.
 Calcoliamo E_J, E_S .

$$E_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{E_J}(\lambda) = |E_J - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha \\ -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha^2$$

da cui

$$P_{E_J}(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \alpha \Rightarrow \rho(E_J) = |\alpha|$$

$$E_S = -(D+L)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

→ colonne di zeri sempre presenti in $E_S \Rightarrow$
 c'è sempre l'autorelatore $\lambda = 0$.