Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea Magistrale in Matematica Applicata

Qualche esercizio di Analisi funzionale
A.A. 2011/12, Marco Squassina - Foglio N.3 / Spazi normati - convergenze

Problema 1. Provare ad indovinare chi è la proiezione di un $x \in \ell^2$ su

$$C = \{x \in \ell^2 : |x_j| \leq a_j\}$$

con riferimento all'esercizio svolto in classe, dove invece

$$C = \{x \in \ell^2 : 0 \leq x_j \leq a_j\}.$$

Problema 2. Sia $f_n : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la successione definita da

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x^2} \chi_{(n,+\infty)}(x).$$

Studiarne la convergenza in $L^p(0, +\infty)$, per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Problema 3. Sia X lo spazio delle funzioni $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ misurabili tali che

$$\int_0^\infty \psi^\beta(x)|f(x)| < +\infty,$$

dove $\psi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ è una funzione continua tale che $\psi(x) \to 1$ per $x \to +\infty$ e $\psi(x)/x \to 1$ per $x \to 0^+$. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ le relazioni tra X ed $L^1(0, +\infty)$ (mutue inclusioni).

Problema 4. Sia $f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ la successione definita da

$$f_n(x) = x^{-\frac{1}{n+1}}$$

Studiarne la convergenza in $L^p(0, 1)$, per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Verona, 15 dicembre 2011