21. Studio del grafico di una funzione: esercizi

Esercizio 21.6. *Studiare ciascuna delle seguenti funzioni in base allo schema di pagina 194, eseguendo anche il computo della derivata seconda e lo studio dell'andamento di convessità laddove i calcoli non risultino troppo onerosi, e disegnare un grafico approssimativo della funzione.*

1. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$; *2.* $f(x) = \left(\dfrac{100 + x}{307 - 2x}\right)^2$;

3. $f(x) = \log(x - 3x^2)$; *4.* $f(x) = \dfrac{x}{(11 - \sqrt{3x})^2}$;

5. $g(x) = (2x^2 - x + 1)\,\mathrm{e}^x$.

$\boxed{R}$ *1.* Imponendo che $x^2 - 5x + 4 \neq 0$, il dominio risulta $\mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile.

Si ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^\pm} g(x) = \mp\infty$ e $\lim\limits_{x\to 4^\pm} g(x) = \pm\infty$. Dai limiti si vede immediatamente che la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$ e che le rette $x = 1$ e $x = 4$ sono asintoti verticali.

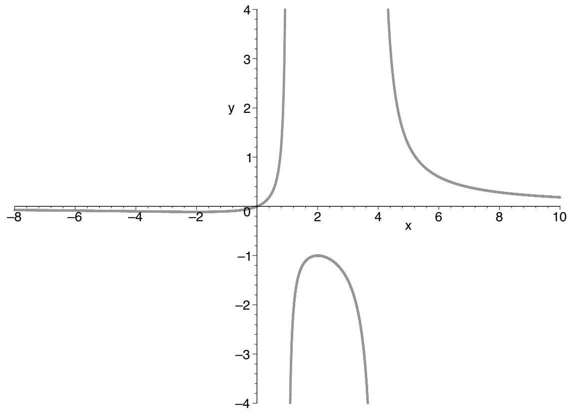
La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4 - x(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 - 5x + 4)^2},$$

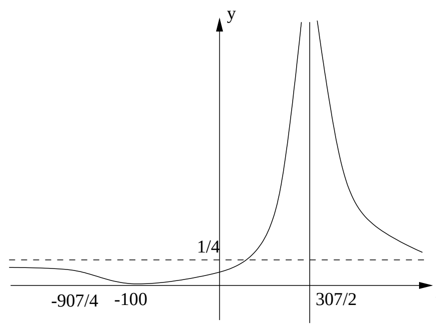
perciò, limitatamente al dominio, $g'(x) \geq 0$ se e solo se $4 - x^2 \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-2, 1[\cup]1, 2[, \\ = 0, & \text{se } x = -2 \text{ oppure } x = 2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]2, 4[\cup]4, +\infty[, \end{cases}$$

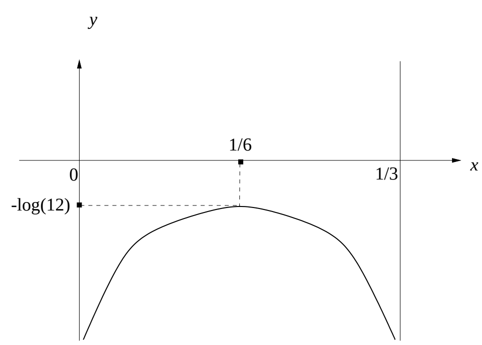
quindi la funzione è crescente su $]-2, 1[$ e su $]1, 2[$, decrescente su $]-\infty, -2[$, su $]2, 4[$ e su $]4, +\infty[$. In $x = -2$ e $x = 2$ ammette, rispettivamente, un minimo e un massimo relativo.



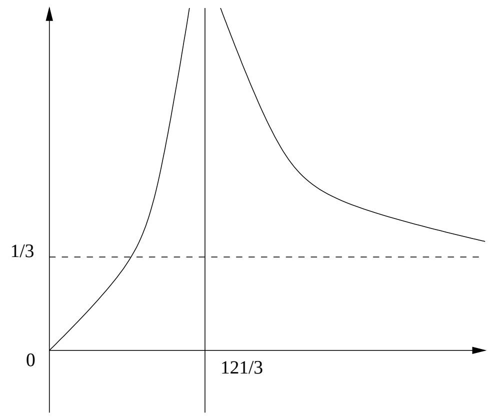
2. Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{307/2\}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{4}$, $\lim_{x\to 307/2} f(x) = +\infty$. f è decrescente in $]-\infty, -100[$ e in $]307/2, +\infty[$; è crescente in $[-100, 307/2[$. -100 è punto di minimo relativo e $f(-100) = 0$; f è concava in $]-\infty, -907/4[$ e convessa in $]-907/4, 307/2[$ e in $]307/2, +\infty[$.



3. Il dominio è $]0, 1/3[$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1/3^-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = \frac{1-6x}{x-3x^2}$; f è crescente in $]0, 1/6[$ e decrescente in $]1/6, 1/3[$. $f''(x) = -\frac{18x^2-6x+1}{(x-3x^2)^2}$; f è concava in tutto il dominio $]0, 1/3[$



4. Il dominio è $[0, +\infty[\setminus\{121/3\}$. $f'(x) = \frac{11}{(11-\sqrt{3x})^3}$; f è crescente in $[0, 121/3[$ e decrescente in $]121/3, +\infty[$. $f''(x) = \frac{99}{2(11-\sqrt{3x})^4\sqrt{3x}}$; f è convessa in $[0, 121/3[$ e in $]121/3, +\infty[$.



5. Il dominio è banalmente $D = \mathbb{R}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile. Si ha facilmente che $g \geq 0$ se $2x^2 - x + 1 \geq 0$ che è sempre verificato.

Si ha $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{\mathrm{e}^{-x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x - 1}{-\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{\mathrm{e}^{-x}} = 0,$$

quindi la retta $x = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$.

La derivata prima è

$$g'(x) = (4x - 1)\,\mathrm{e}^x + (2x^2 - x + 1)\,\mathrm{e}^x = (2x^2 + 3x)\,\mathrm{e}^x,$$

perciò $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2 + 3x \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -3/2[\cup]0, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -3/2 \text{ oppure } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]-3/2, 0[, \end{cases}$$

quindi la funzione è decrescente su $]-3/2, 0[$, crescente su $]-\infty, -3/2[$ e su $]0, +\infty[$. In $x = -3/2$ e $x = 0$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo.

La derivata seconda è

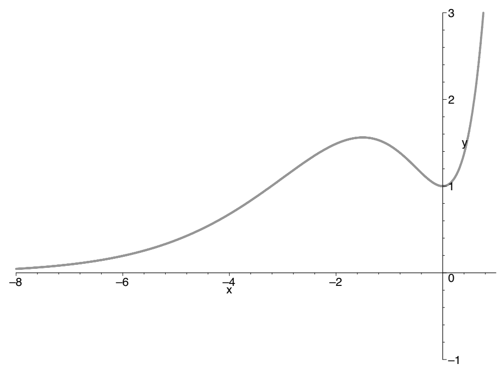
$$g''(x) = (4x + 3)\,\mathrm{e}^x + (2x^2 + 3x)\,\mathrm{e}^x = (2x^2 + 7x + 3)\,\mathrm{e}^x,$$

perciò $g''(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2 + 7x + 3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -3$ oppure

$x \geq -1/2$. Si ottiene

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -3[\cup]-1/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -3 \text{ oppure } x = -1/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-3, -1/2[, \end{cases}$$

quindi la funzione è concava su $]-3, -1/2[$, convessa su $]-\infty, -3[$ e su $]-1/2, +\infty[$. In $x = -1/2$ e $x = -3$ ammette due punti di flesso.



Esercizio 21.7. *Studiare la seguente funzione in base allo schema di pagina 194, tralasciando lo studio dell'andamento di convessità.*

$$f(x) = \frac{11 - 2x}{x^2 + 2x + 31}.$$

Determinare inoltre le coordinate del punto di intersezione tra il grafico di f e l'asse x, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f in tale punto e disegnarla insieme al grafico della funzione.

$\boxed{R}$ Si osserva che il denominatore non si annulla mai, perché

$$x^2 + 2x + 31 = (x + 1)^2 + 30$$

quindi il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.

Raccogliendo x a numeratore e denominatore si scopre che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Calcoliamo la derivata di f utilizzando la formula di derivazione del quoziente. Si ha

$$f'(x) = \frac{-2(x^2 + 2x + 31) - (11 - 2x)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 31)^2} = 2\frac{x^2 - 11x - 42}{(x^2 + 2x + 31)^2}$$

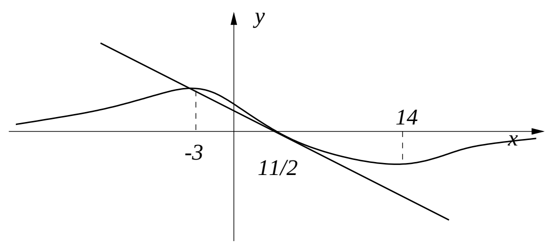
e quindi

$$f'(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, -3] \cup [14, +\infty[$$

quindi f risulta crescente in $]-\infty, -3]$ e in $[14, +\infty[$ mentre è decrescente in $[-3, 14]$.

Il punto di intersezione tra il grafico di f e l'asse x è $(11/2, 0)$. L'equazione della retta tangente è $y = -\frac{8}{289}(x - \frac{11}{2})$.

Un grafico approssimativo di f è il seguente.



Esercizio 21.8. *Studiare ciascuna delle seguenti funzioni in base allo schema di pagina 194, eseguendo anche il computo della derivata seconda e lo studio dell'andamento di convessità laddove i calcoli non risultino troppo onerosi. Scrivere inoltre l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = x_0$ a fianco indicato e disegnarla insieme ad un grafico approssimativo della funzione.*

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{8 - x^3}$, $x_0 = -2\sqrt[3]{2}$; *2.* $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 17}{13 - 2x}$, $x_0 = 15$;

3. $f(x) = e^{8x - x^2}$, $x_0 = 0$; *4.* $f(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{x+4}}$, $x_0 = -8/3$;

5. $f(x) = \log(x^4 - 16)$, $x_0 = 3$; *6.* $f(x) = \log(1 - x)$, $x_0 = -2$.

$\boxed{R}$ Poiché $8 - x^3 = 0$ se e solo se $x = 2$, allora il dominio di f risulta $D =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. Raccogliendo x^2 al denominatore e semplificando si scopre che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty.$$

Calcoliamo la derivata di f utilizzando la formula di derivazione del quoziente. Si ha

$$f'(x) = \frac{2x(8-x^3) - x^2(-3x^2)}{(8-x^3)^2} = \frac{x^4+16x}{(8-x^3)^2} = \frac{x(x^3+16)}{(8-x^3)^2}$$

e quindi per ogni $x \neq 2$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3+16 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x^3+16 < 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 \geq -16 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x^3 < -16 \end{cases} \iff x \geq 0 \ \cup \ x < -2\sqrt[3]{2}$$

$$\iff x \in]-\infty, -2\sqrt[3]{2}] \cup [0, +\infty[$$

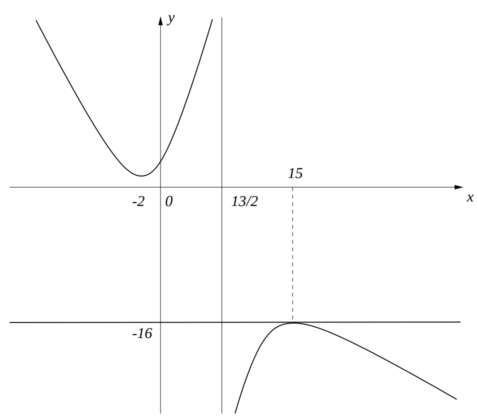
dove però bisogna ricordare che $x \neq 2$. Quindi f risulta crescente in $]-\infty, -2\sqrt[3]{2}]$, in $[0, 2[$ e in $[2+\infty[$ mentre è decrescente in $[-2\sqrt[3]{2}, 0]$.

L'equazione della retta tangente è $y = f(-2\sqrt[3]{2}) + f'(-2\sqrt[3]{2})(x + 2\sqrt[3]{2})$. D'altra parte

$$f(-2\sqrt[3]{2}) = 2^{-1/3}/5, \quad f'(-2\sqrt[3]{2}) = 0$$

quindi l'equazione della retta tangente diviene $y = 2^{-1/3}/5$.

2. Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{13/2\}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 13/2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 13/2^+} f(x) = -\infty$. $f'(x) = 2\dfrac{-x^2+13x+30}{(13-2x)^2}$, $x \in D$; f è crescente in $]-2, 13/2[$e in $]13/2, 15[$ e decrescente in $]-\infty, -2[$ e in $]15, +\infty[$. $f''(x) = 578/(13-2x)^3$, $x \in D$; f è convessa in $]-\infty, 13/2[$ e concava in $]13/2, +\infty[$. L'equazione della tangente è $y = -16$.



x

*3.*Il dominio è $\mathbb{R}$. Raccogliendo x all'esponente si scopre che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Calcoliamo la derivata di f utilizzando la formula di derivazione delle funzioni composte. Si ha

$$f'(x) = 2(4-x)\,\mathrm{e}^{8x-x^2}$$

sichhé

$$f'(x) \geq 0 \iff 4-x \geq 0 \iff x \leq 4$$

Quindi f risulta crescente in $]-\infty, 4]$ e decrescente in $[4, +\infty]$. Si ha inoltre $f(4) = \mathrm{e}^{16}$.

Calcoliamo la derivata seconda di f utilizzando la formula di derivazione del prodotto. Si ha

$$f''(x) = 2(2x^2 - 16x + 31)\,\mathrm{e}^{8x-x^2}$$

e quindi si ha

$$f''(x) \geq 0 \iff 2x^2 - 16x + 31 \geq 0 \iff x \leq 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x \geq 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi f risulta convessa in $]-\infty, 4-\sqrt{2}/2]$ e concava in $[4+\sqrt{2}/2, +\infty]$.

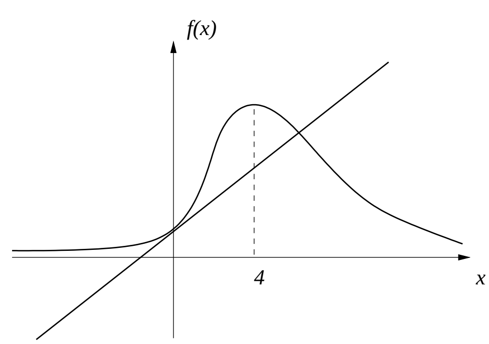
L'equazione della retta tangente è $y = f(0) + f'(0)x$. D'altra parte

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 8$$

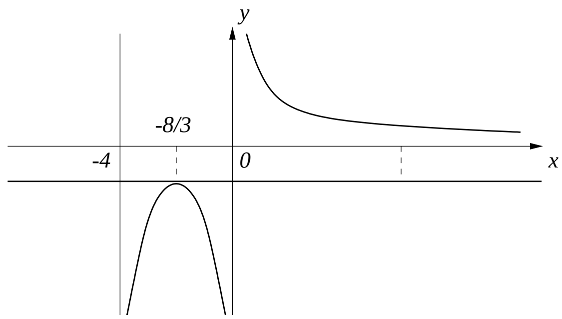
quindi l'equazione della retta tangente diviene

$$y = 1 + 8x.$$

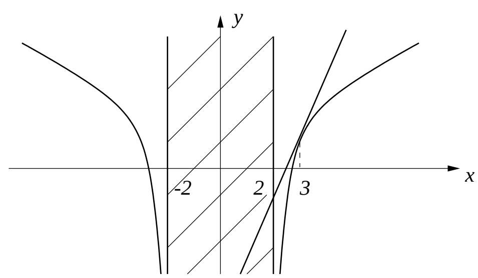
Un grafico approssimativo di f è il seguente.



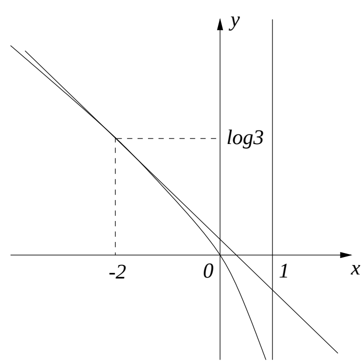
4. Il dominio è $]-4,0[\cup]0,+\infty[$. $\lim_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $f'(x) = -\dfrac{3x+8}{x^2(x+4)^{3/2}}$; f è crescente in $]-4,-8/3[$ e decrescente in $]-8/3,0[$ e in $]0,+\infty[$. L'equazione della tangente è $y = -3\sqrt{3}/8$.



5. Il dominio è $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$. $f'(x) = 4\frac{x^3}{x^4-16}$; f è decrescente in $]-\infty,-2[$ e crescente in $]2,+\infty[$. La retta tangente è $y = \log 65 + \dfrac{108}{65}(x-3)$.



6. Il dominio è $D\ =]-\infty,1[$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = -1/(1-x)$, $x \in D$; f è decrescente in $]-\infty,1[$. $f''(x) = -1/(1-x)^2$, $x \in D$; f è concava in $]-\infty,1[$. La retta tangente è $y = -\dfrac{1}{3}(x+2) + \log 3$



Esercizio 21.9. *Date le successioni definite per* $n = 1, 2, 3, \dots$ *da*

1. $a_n = \dfrac{8-n}{8+3n}$, *2.* $a_n = \dfrac{n^2+2n+17}{13-2n}$, *3.* $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{20n+1900}$,

4. $a_n = \dfrac{n+6}{2\sqrt{n}-5}$, *5.* $a_n = \dfrac{n+100}{2n-201}$, *6.* $a_n = \dfrac{n^3}{512-n^2}$,

7. $a_n = \left(\dfrac{100+n}{307-2n}\right)^2$, *8.* $a_n = n + \dfrac{8}{n^4}$, *9.* $a_n = \dfrac{2n^2+1}{512-n^2}$,

10. $a_n = \dfrac{n}{(11-\sqrt{3n})^2}$, *11.* $a_n = \dfrac{20n^2+50}{n^2-300}$,

dire se sono limitate, calcolare gli estremi superiore e inferiore e dire se sono, rispettivamente, massimo e minimo.

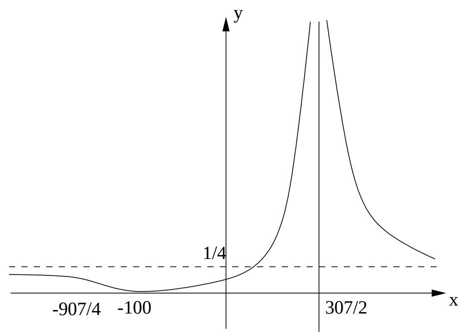
$\boxed{R}$ *1.* È limitata; $\sup a_n = \max a_n = a_1 = 7/11$, $\inf a_n = -1/3$ e non è minimo.
2. Non è limitata; $\inf a_n = -\infty$, $\max a_n = a_6 = 65$.
3. È limitata; $\max a_n = a_{95} = \sqrt{95}/3800$, $\inf a_n = 0$ e non è minimo.
4. Non è limitata; $\sup a_n = +\infty$, $\min a_n = a_6 = 12/(2\sqrt{6}-5)$.
5. È limitata; $\max a_n = a_{101} = 201$, $\min a_n = a_{100} = -200$.
6. Non è limitata; $\max a_n = a_{22} = 2662/7$, $\inf a_n = -\infty$.
7. Poiché $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{4}$ la successione è convergente e quindi limitata, per il teorema di limitatezza delle successioni convergenti. Per rispondere alle altre domande dovremmo studiare l'andamento di crescenza della successione. Nel caso di funzioni definite su (unioni di) intervalli questo è possibile farlo studiando il segno della derivata. Le successioni sfortunatamente non sono derivabili in alcun punto del loro dominio, poiché in nessuno di tali punti ha senso considerare il limite del rapporto incrementale. Si può allora ricorrere all'espediente di estendere il dominio della successione considerando la funzione

$$f(x) = \left(\frac{100+x}{307-2x}\right)^2,$$

il cui dominio è $\mathbb{R} \setminus \{307/2\}$. Questa funzione è stata oggetto dell'esercizio 21.6. Studiandola si trova che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{4}, \qquad \lim_{x\to 307/2} f(x) = +\infty;$$

f è decrescente in $]-\infty, -100[$ e in $]307/2, +\infty[$; f è crescente in $[-100, 307/2[$; -100 è punto di minimo con $f(-100) = 0$ e il suo grafico è approssimativamente come in figura.



Per tornare ad occuparci della successione osserviamo che $a_n = f(n)$, cioè i valori che in realtà interessano per studiare la successione non sono tutti i reali escluso 307/2 ma solo i naturali tra 1 e $+\infty$, ai quali si può ora restringere l'analisi del grafico di f.

La successione ha quindi il seguente andamento: cresce a partire dal valore $a_1 = \left(\frac{101}{305}\right)^2 < \frac{1}{4}$ per tutti gli n fino a $n = 153$ (quello immediatamente precedente a 307/2) dove assume il valore $a_{153} = 253^2$. Dopodichè decresce a partire dal valore $a_{154} = 254^2$ fino a convergere, decrescendo, ad 1/4.

Possiamo quindi concludere che $a_0 = \big(\frac{101}{305})^2$ è minimo e $a_154 = 254^2$ è massimo.

8. Non è limitata; $\sup a_n = +\infty$, $\min a_n = a_2 = 5/2$.
9. È limitata; $\max a_n = a_{22} = 969/28$, $\min a_n = a_{23} = -1059/17$.
10. È limitata; $\min a_n = a_1 \simeq 0.01$, $\max a_n = \max\{a_{40}, a_{41}\} = a_{40} \simeq 19279.9$.
11. È limitata; $\max a_n = a_{18} = 3265/12$, $\min a_n = a_{17} = -5830/11$.

Esercizio 21.10. *Studiare ciascuna delle seguenti funzioni in base allo schema di pagina 194, eseguendo anche il computo della derivata seconda e lo studio dell'andamento di convessità laddove i calcoli non risultino troppo onerosi. Scrivere inoltre l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = x_0$ a fianco indicato. Disegnare infine un grafico approssimativo della funzione.*

1. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 12x}$, $x_0 = -1$; *2.* $g(x) = \dfrac{x - x^2}{2 + x}$, $x_0 = 2$;

3. $g(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 4}{x^2 + 4}$, $x_0 = 1$; *4.* $g(x) = x\sqrt{1 - x}$, $x_0 = -3$;

5. $g(x) = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$; *6.* $g(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x + 2}$, $x_0 = 3$.

$\boxed{R}$ *1.* Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui $3x^2 - 12x \neq 0$, ovvero $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$. La funzione è ivi continua e derivabile.

Il numeratore è ≥ 0 quando $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ ovvero $x \leq 1$ oppure $x \geq 3$, mentre il denominatore è positivo se e solo se $x < 0$ oppure $x > 4$. Si conclude che

$$g(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1, 3[\cup]4, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1 \text{ oppure } x = 3, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 1[\cup]3, 4[. \end{cases}$$

Tenendo conto di quanto ora osservato, si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^\pm} g(x) = \left[\frac{3}{0^\mp}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to 4^\pm} g(x) = \left[\frac{3}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

mentre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}.$$

Quindi la funzione non ammette minimo nè massimo assoluto.

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2x-4)(x^2-4x) - (x^2-4x+3)(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = -\frac{2x-4}{(x^2-4x)^2},$$

quindi $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2x - 4 \leq 0$ ovvero se $x \leq 2$. La funzione è dunque crescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, 2[$, decrescente su $]2, 4[$ e su $]4, +\infty[$. In $x = 2$ ammette un massimo relativo.

L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

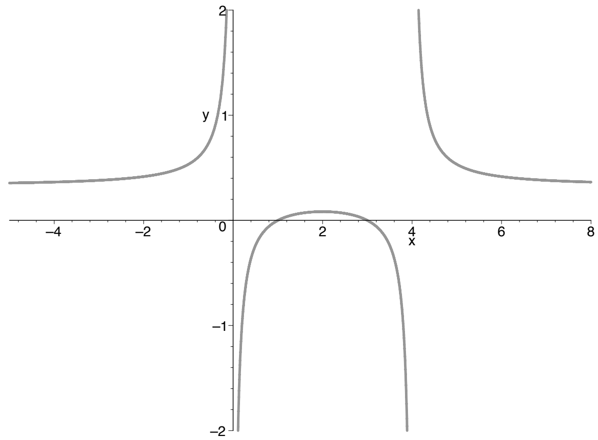
Poiché $g(-1) = 8/15$ e $g'(-1) = 6/25$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{6}{25}(x+1) + \frac{8}{15}.$$

La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{2(x^2-4x)^2 - (2x-4)2(x^2-4x)(2x-4)}{(x^2-4x)^4} \\ &= 2\frac{3x^2-12x+16}{(x^2-4x)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il numeratore è sempre positivo, si ha che $g''(x) > 0$ se e solo se $(x^2-4x)^3 > 0$ ovvero se $x < 0$ oppure $x > 4$. La funzione è dunque concava su $]0, 4[$, convessa su $]-\infty, 0[$ e su $]4, +\infty[$.



2. Il dominio è dato dagli x per cui il denominatore non si annulla, quindi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

Ha senso andare a studiare i limiti in -2 e $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-x^2}{2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1/x-1)}{x(2/x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x \cdot \frac{1/x-1}{2/x+1} \right) = \mp\infty.$$

Poiché il denominatore è positivo per valori maggiori di -2 e negativo per valori minori di -2, si ottiene che

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{x-x^2}{2+x} = \left[\frac{-6}{0^+}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to-2^-} \frac{x-x^2}{2+x} = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{(1-2x)(2+x)-(x-x^2)1}{(2+x)^2} = \frac{-x^2-4x+2}{(2+x)^2}.$$

Il denominatore è sempre positivo quindi la derivata è ≥ 0 se e solo se $-x^2-4x+2 \geq 0$ ovvero $-2-\sqrt{6} \leq x \leq -2+\sqrt{6}$. Ricordando che la funzione non è definita in -2 si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-2-\sqrt{6}, -2[\cup]-2, -2+\sqrt{6}[, \\ = 0, & \text{se } x = -2-\sqrt{6} \text{ oppure } x = -2+\sqrt{6}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2-\sqrt{6}[\cup]-2+\sqrt{6}, +\infty[. \end{cases}$$

Quindi la funzione è crescente su $]-2-\sqrt{6}, -2[$ e su $]-2, -2+\sqrt{6}[$, mentre è decrescente su $]-\infty, -2-\sqrt{6}[$ e su $]-2+\sqrt{6}, +\infty[$. In $x = -2-\sqrt{6}$ e

$x = -2+\sqrt{6}$ la funzione ammette, rispettivamente, un minimo e un massimo relativo.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{(-2x-4)(2+x)^2 - (-x^2-4x+2)2(2+x)}{(2+x)^4} = -\frac{12}{(2+x)^3}.$$

La derivata seconda è > 0 se e solo se $(2+x)^3 < 0$ ovvero $x < -2$. Quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[, \\ < 0, & \text{se } x \in]-2, +\infty[. \end{cases}$$

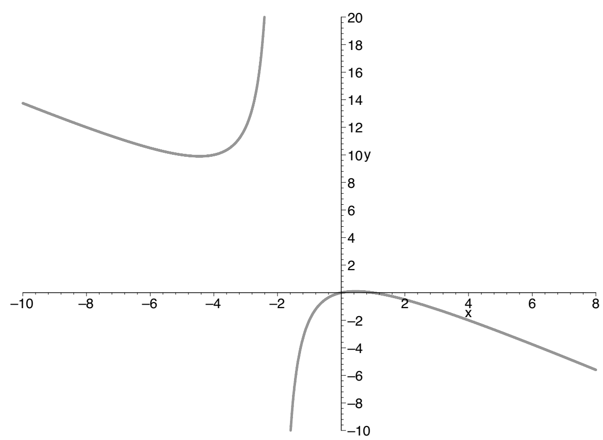
In definitiva la funzione è convessa su $]-\infty, -2[$ e concava su $]-2, +\infty[$.

L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = -1/2$ e $g'(2) = -5/8$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{5}{8}(x-2) - \frac{1}{2}.$$



3. Poiché il denominatore non si annulla mai, il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+2x-4}{x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1+2/x-4/x^2}{1+4/x^2} = \frac{-1}{1} = -1,$$

quindi la retta $y = -1$ è un asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{(-2x+2)(x^2+4) - (-x^2+2x-4)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}.$$

Il denominatore è sempre positivo quindi la derivata è ≥ 0 se e solo se $8 - 2x^2 \geq 0$ ovvero $-2 \leq x \leq 2$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-2, 2[, \\ = 0, & \text{se } x = -2 \text{ oppure } x = 2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[. \end{cases}$$

Quindi la funzione è crescente su $]-2, 2[$ mentre è decrescente su $]-\infty, -2[$ e su $]2, +\infty[$. In $x = -2$ e $x = 2$ la funzione ammette, rispettivamente, un minimo e un massimo relativo.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{-4x(x^2+4)^2 - (8-2x^2)2(x^2+4)2x}{(x^2+4)^4} = \frac{-4x(x^2+4) - (8-2x^2)4x}{(x^2+4)^3} \\ &= \frac{4x^3 - 48x}{(x^2+4)^3} = \frac{4x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} \end{aligned}$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $4x(x^2 - 12) \geq 0$. Si ha che $x^2 - 12 \geq 0$ se e solo se $x \leq -2\sqrt{3}$ oppure $x \geq 2\sqrt{3}$. Dalla regola dei segni segue che.

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-2\sqrt{3}, 0[\cup]2\sqrt{3}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -2\sqrt{3} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = 2\sqrt{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2\sqrt{3}[\cup]0, 2\sqrt{3}[. \end{cases}$$

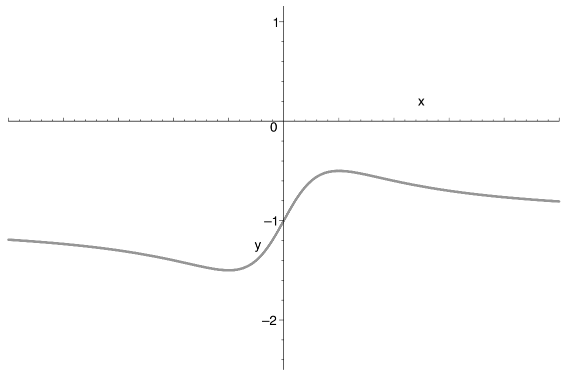
In definitiva la funzione è convessa su $]-2\sqrt{3}, 0[$ e su $]2\sqrt{3}, +\infty[$, concava su $]-\infty, -2\sqrt{3}[$ e su $]0, 2\sqrt{3}[$. In $x = 0$, $x = -2\sqrt{3}$ e $x = 2\sqrt{3}$, la funzione ha tre punti di flesso.

L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = -3/5$ e $g'(1) = 6/25$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{6}{25}(x-1) - \frac{3}{5}.$$



4. Il dominio è dato da $1 - x \geq 0$ perciò $\mathcal{D} =]-\infty, 1]$. La funzione è ivi continua e derivabile.

L'unico limite da calcolare è

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = [(-\infty) \cdot (+\infty)] = -\infty.$$

Quindi la funzione non ammette minimo assoluto.

Per ogni $x < 1$ la derivata prima è

$$g'(x) = \sqrt{1-x} + x \frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

quindi $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2 - 3x \geq 0$, ovvero $x \leq 2/3$.

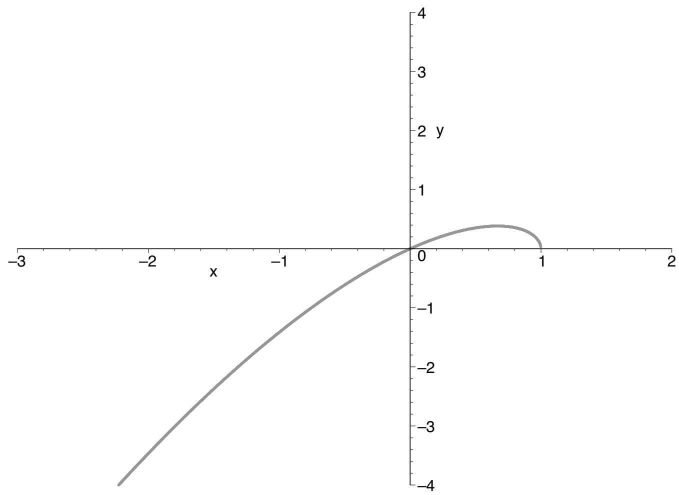
In definitiva la derivata è positiva per $x < 2/3$, negativa se $x \in]2/3, 1[$. La funzione è quindi crescente su $]-\infty, 2/3[$ e decrescente su $]2/3, 1[$. In $x = 2/3$ ammette un punto di massimo relativo a tangente orizzontale, che è anche di massimo assoluto.

L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-3) = -6$ e $g'(-3) = 11/4$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{11}{4}(x+3) - 6.$$



5. Il dominio è $\mathcal{D} =]0, +\infty[$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

Ha senso andare a studiare i limiti in $x_0 = 0^+$ e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) = [+\infty + 0] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la retta $x = 0$ è un asintoto verticale.

Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{2\sqrt{x} - (2x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{4x - (2x+1)}{2x^{3/2}} = \frac{2x-1}{2x^{3/2}}.$$

Il denominatore è sempre positivo quindi la derivata è ≥ 0 se e solo se $2x - 1 \geq 0$ ovvero $x \geq 1/2$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 1/2[. \end{cases}$$

Quindi la funzione è crescente su $]1/2, +\infty[$ mentre è decrescente su $]0, 1/2[$. In $x = 1/2$ la funzione ammette un minimo relativo ed assoluto.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{2x^{3/2} - (2x-1)\frac{3}{2}x^{1/2}}{2x^3} = \frac{4x - 3(2x-1)}{4x^{5/2}} = \frac{3-2x}{4x^{5/2}}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $3 - 2x \geq 0$ ovvero $x \leq 3/2$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, 3/2[, \\ = 0, & \text{se } x = 3/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]3/2, +\infty[. \end{cases}$$

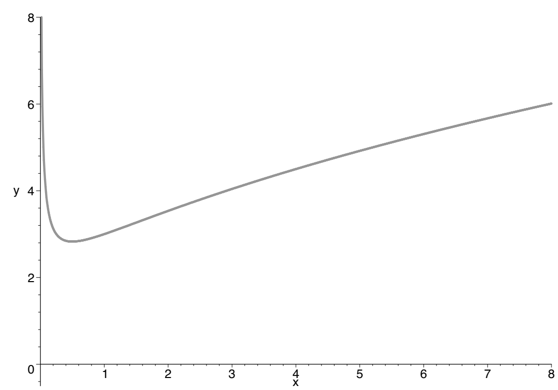
In definitiva la funzione è convessa su $]0, 3/2[$, concava su $]3/2, +\infty[$. In $x = 3/2$ la funzione ha un punto di flesso.

L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = 3$ e $g'(1) = 1/2$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 3.$$



6. Il dominio è dato dagli x per cui il denominatore non si annulla, quindi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

Ha senso andare a studiare i limiti in 1, 2 e $\pm\infty$. Si ha (limiti di funzioni razionali)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2} = 0.$$

Poiché il denominatore è positivo per valori esterni a 1 e 2, si ottiene che

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

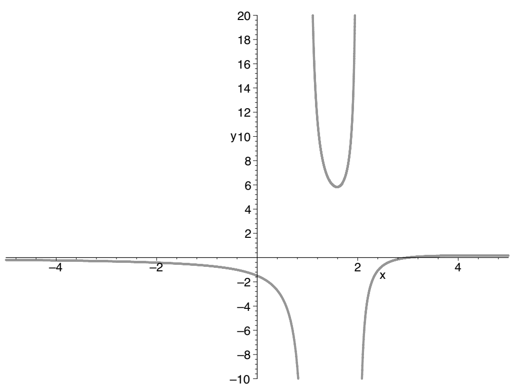
Calcoliamo la derivata prima:

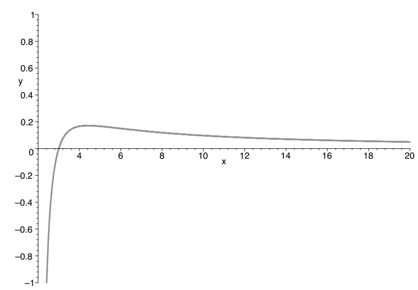
$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 3x + 2) - (x-3)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 7}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo quindi la derivata è ≥ 0 se e solo se $-x^2 + 6x - 7 \geq 0$ ovvero $3 - \sqrt{2} \leq x \leq 3 + \sqrt{2}$. Ricordando che la funzione non è definita in 1 e in 2 si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]3-\sqrt{2}, 2[\cup]2, 3+\sqrt{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = 3 - \sqrt{2} \text{ oppure } x = 3 + \sqrt{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1[\cup]1, 3-\sqrt{2}[\cup]3+\sqrt{2}, +\infty[. \end{cases}$$

Quindi la funzione è crescente su $]3-\sqrt{2}, 2[$ e su $]2, 3+\sqrt{2}[$, mentre è decrescente su $]-\infty, 1[$, su $]1, 3-\sqrt{2}[$ e su $]3+\sqrt{2}, +\infty[$. In $x = 3-\sqrt{2}$ e $x = 3+\sqrt{2}$ la funzione ammette, rispettivamente, un minimo e un massimo relativo.





L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(3) = 0$ e $g'(3) = 1/2$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{x-3}{2}.$$