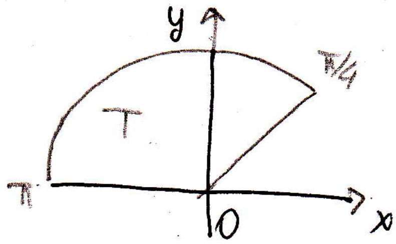
③ Calcolare, se esiste, $\iint_T xy\,dx\,dy$ ove

$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0,\ y\ge x\}$



Ris

Teorema

Sia $C\subset\mathbb{R}^2$ chiuso limitato e misurabile. Sia $f: C\to\mathbb{R}$ limitata

Suppongo che $\exists E\subset C$ misurabile con area $E=0$ ed f sia continua su $C\setminus E$

$\Rightarrow$ f è integrabile su T

Teorema

Sia $f\in C^0(C\setminus E)$, $C\subset\mathbb{R}^2$, E sottoinsieme di C di area nulla

Sia f limitata in C

a) se $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le \psi(x)\}$, φ,ψ continue

$$\Rightarrow \iint_C f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

b) se $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ c\le y\le d\ \ \varphi(y)\le x\le \psi(y)\}$, φ,ψ continue

$$\Rightarrow \iint_C f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

T è un chiuso limitato misurabile del piano

f è integrabile su T perché f continua su T

Usando coordinate polari di centro l'origine, T è il trasformato

di $K=\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le\rho\le 1,\ \vartheta\in[\frac{\pi}{4},\pi]\}$

secondo $\phi(\rho,\vartheta)=(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)$.