TUTORAGGIO ANALISI II - LEZIONE DEL 11/1/2013

dott.ssa Sconcelle

① Calcolare il seguente integrale

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,2]} y e^{xy} \, dx\, dy$$

<u>Svolgimento</u>

Siccome la funzione integranda f è continua sul rettangolo $[0,1]\times[0,2]$ si ha che f è integrabile e che l'integrale doppio è uguale all'integrale iterato, cioè

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,2]} y e^{xy} \, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 y e^{xy} \, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 y e^{xy} \, dx \right) dy$$

(questo è il teorema delle formule di riduzione).

Abbiamo quindi due modi per calcolare l'integrale doppio.

Modi che se, comunque portano allo stesso risultato, non è detto che siano equivalenti dal punto di vista della difficoltà dei calcoli.

Proviamo nel primo modo, calcoliamo

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 y e^{xy} \, dy \right) dx$$

Si inizia calcolando prima l'integrale racchiuso tra parentesi. Si noti che l'integrale viene calcolato rispetto alla variabile y (x viene pensato come se fosse una costante). Si ha

$$\int_0^2 y e^{xy} \, dy \overset{\text{per parti}}{=} \left. \frac{e^{xy}}{x} \cdot y \right|_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{xy}}{x} \cdot 1 \, dy = \left[\frac{y}{x} e^{xy} - \frac{1}{x^2} e^{xy} \right]_{y=0}^{y=2} =$$

$$= \frac{2}{x} e^{2x} - \frac{1}{x^2} e^{2x} + \frac{1}{x^2}$$

Quindi si ha che

$$I = \int_0^1 \left(\frac{2}{x} e^{2x} - \frac{1}{x^2} e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

← integrale improprio
(la funzione integranda è illimitata nei pressi dell'origine).

dove ora la variabile di integrazione è x. Poniamo $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \left(\frac{2}{x} e^{2x} - \frac{1}{x^2} e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$
Integrando ancora per parti si ha:

$$I_\varepsilon = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \frac{2}{x} \Bigg|_\varepsilon^1 - \cancel{\int_\varepsilon^1 \frac{e^{2x}}{2} \cdot \left(-\frac{2}{x^2} \right) dx} + \cancel{\int_\varepsilon^1 - \frac{1}{x^2} e^{2x}} - \frac{1}{x} \Bigg|_\varepsilon^1 = \left[\frac{e^{2x} - 1}{x} \right]_\varepsilon^1 = \frac{e^2 - 1}{1} - \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{\varepsilon}$$

quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{e^2 - 1}{1} - \frac{e^{2\varepsilon - 1}}{\varepsilon} \right] = e^2 - 1 - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{e^{2\varepsilon - 1}}{2\varepsilon} \cdot 2 = e^2 - 1 - 2 = e^2 - 3$$

pertanto I esiste e vale $e^2 - 3$.

Proviamo ora nel secondo modo, calcoliamo

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^1 y e^{xy} dx \right) dy$$

Calcoliamo l'integrale racchiuso tra parentesi (ora la variabile di integrazione è x). Si ha

$$\int_0^1 y e^{xy} dx = \int_0^1 e^{xy} d(yx) = \left[e^{xy} \right]_{x=0}^{x=1} = e^y - 1$$

pertanto si ha che

$$I = \int_0^2 (e^y - 1) dy = \left[e^y - y \right]_{y=0}^{y=2} = e^2 - 2 - 1 = e^2 - 3$$

② Calcolare il seguente integrale

$$I = \iint_{[1,2]\times[0,\pi]} x \cdot \sin y \, dx \, dy$$

Svolgimento

Quando due funzioni $h(y)$ e $g(x)$ sono continue su $[a,b]\times[c,d]$ e la funzione integranda è data dal prodotto delle due funzioni h e g, si ha che l'integrale doppio equivale al prodotto dei due integrali unidimensionali, cioè

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)\,h(y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$$

Calcoliamo I come abbiamo fatto nell'esercizio precedente. Si ha

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^\pi x \cdot \sin y \, dy \right) dx$$

Calcoliamo l'integrale tra parentesi

$$\int_0^\pi x \cdot \sin y \, dy = x \int_0^\pi \sin y \, dy = x \Big[-\cos y \Big]_0^\pi = x(1+1) = 2x$$

pertanto si ha

$$I = \int_1^2 2x \, dx = \left[\cancel{2} \frac{x^2}{\cancel{2}} \right]_1^2 = 4 - 1 = 3$$

Proviamo ora a calcolare I in base all'osservazione fatta. Si ha

$$I = \int_1^2 x\,dx \cdot \int_0^\pi \sin y \, dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \cdot \Big[-\cos y \Big]_0^\pi = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot (1+1) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

③ Calcolare il seguente integrale

$$I = \iint_A 2x \, dx \, dy$$

con $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$

<u>Svolgimento</u>

Si osservi che ora come dominio di integrazione non abbiamo più un rettangolo, ma un generico dominio.

<u>Def</u>: (y-semplice, x-semplice)

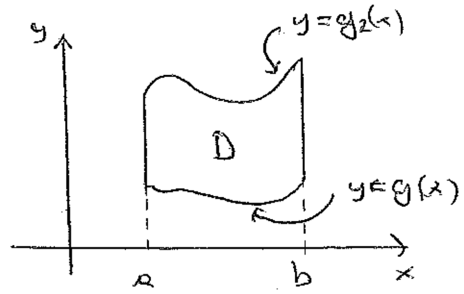
Una regione $D \subset \mathbb{R}^2$ è detta <u>y-semplice</u> se è compresa tra i grafici di due funzioni della variabile x, cioè se è del tipo

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \right\}$$

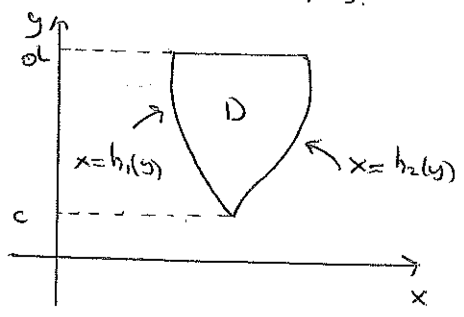
con $g_1(x)$, $g_2(x)$ continue su $[a,b]$.

Analogamente si possono definire le regioni <u>x-semplici</u> come quelle del tipo

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \right\}$$ con $h_1(y)$ e $h_2(y)$ continue su $[c,d]$.



y - semplice



x - semplice

gli integrali doppi su regioni semplici possono essere ancora calcolati mediante gli integrali iterati. Vale il seguente teorema

<u>Teorema</u> (riduzione per domini semplici)

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua e D un dominio y-semplice allora l'integrale doppio di f su $\mathbb{R}$ si può calcolare come integrale iterato, cioè

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \, dy \right) dx$$

Analogamente se $f: D \to \mathbb{R}$ è continua e D è x-semplice allora l'integrale doppio di f su $\mathbb{R}$ si può calcolare come integrale iterato

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ritornando all'esercizio, consideriamo

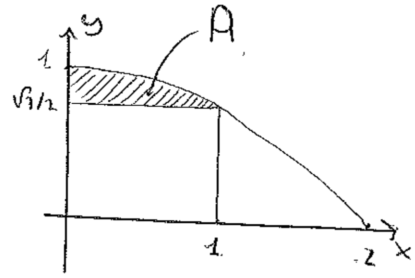
$$\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1$$

esplicitando y si ricava che $|y| \le \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. Ponendo $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e sostituendo nell'equazione dell'ellisse si ricava che

$$\frac{x^2}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad |x| \le 1.$$

quindi possiamo riscrivere il dominio A come

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\le y \le \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right\}$$



quindi si tratta di un dominio y-semplice

L'integrale diventa

$$I = \iint_A 2x\,dx\,dy = \int_0^1 2x\,dx \cdot \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{1-\frac{x^3}{4}}} 1\cdot dy = \int_0^1 2x\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 2x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx - \left.\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right|_0^1 = -4\int_0 (t)^{1/2}\,dt - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

con
$t=1-\frac{x^2}{4}$
$dt=-\frac{1}{4}\cdot 2x\,dx$
$x=0 \quad t=1$
$x=1 \quad t=3/4$

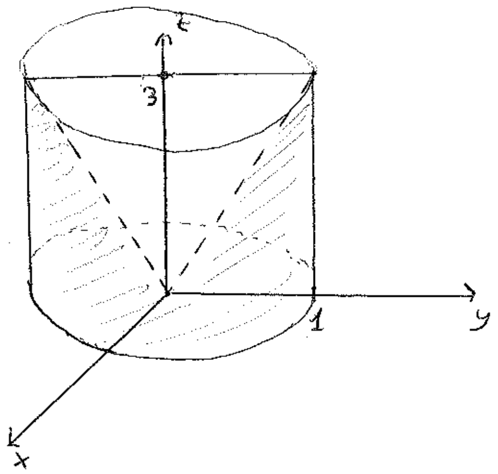
$$= -4\left.\frac{(t)^{3/2}}{3/2}\right|_1^{3/4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = +\frac{8}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\cancel{\frac{8}{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\cancel{8}} = \frac{8}{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

(4) Calcolare il volume della regione

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2\le 1,\ \ 0\le z\le 3\sqrt{x^2+y^2}\}$$

Svolgimento

Per calcolare il volume della regione V si deve calcolare il seguente integrale



$$Vol=\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz$$

Usiamo coordinate cilindriche:

$$T=\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

con $0\le\rho\le 1$, $\theta\in[0,2\pi]$, $0\le z\le 3\rho$

$\det J_T=\rho$ dove $J_T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

quindi

$$Vol=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{3\rho} 1\cdot\rho\cdot dz\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\rho\cdot 3\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}1\cdot d\theta=2\pi$$

(5) Sia dato l'insieme

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le e^{-x}\sqrt{x}\}$$

Calcolare il volume del solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse x.

Svolgimento

Andiamo a studiare preliminarmente la funzione $f(x)=e^{-x}\sqrt{x}$.
Si ha

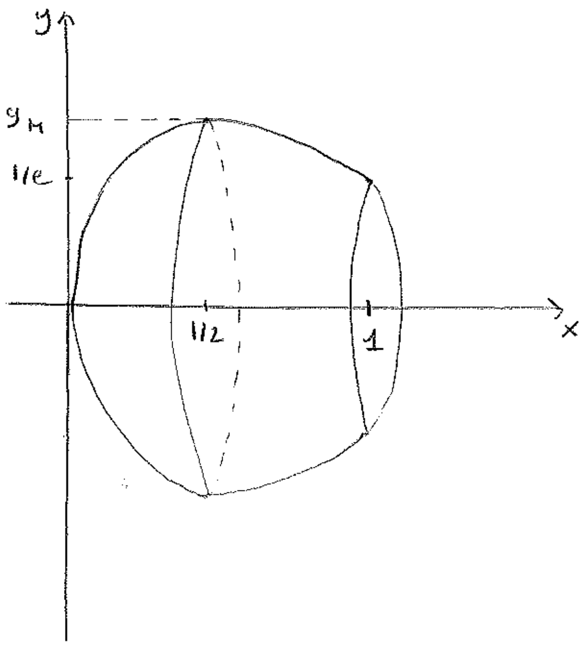
$f(0)=0$

$f(1)=1/e$

$$f'(x)=e^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-e^{-x}\cdot\sqrt{x}=\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}(1-2x)$$

$f'(x)=0 \iff x=\frac{1}{2}$ $\qquad f(1/2)=e^{-1/2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=y_M>\frac{1}{e}$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$ (per la pendenza nell'origine)



Calcoliamo ora il volume del solido ottenuto. Quindi

$$Vol=\iiint_V 1\, dx\,dy\,dz \qquad \text{con } V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ; 0\le x\le 1,\ (y,z)\in S_x\}$$

dove $S_x=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : y^2+z^2=[f(x)]^2\}$

Si ha

$$Vol = \int_0^1 \iint_{S_x} 1 \cdot dy\,dz\,dx = \int_0^1 Area(S_x)\,dx = \int_0^1 \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 e^{-2x} \cdot x\,dx =$$

per parti

$$= \pi \frac{e^{-2x}}{-2} \cdot x \Big|_0^1 + \pi \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\pi e^{-2} + \frac{\pi}{2} \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\pi e^{-2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-2} = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}\pi e^{-2}$$

(6) Sul solido V dell'esercizio precedente integrare la funzione $g(x,y,z) = \frac{\sqrt{z^2+y^2}}{x\sqrt{x}}$.

Svolgimento

Si tratta di un integrale improprio. Quindi si ha

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \iint_{S_x} \frac{\sqrt{z^2+y^2}}{x\sqrt{x}}\,dy\,dz\,dx =$$

$$= \int_\varepsilon^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{f(x)} \frac{\rho}{x\sqrt{x}} \cdot \rho \cdot d\rho\,d\theta\,dx = \int_\varepsilon^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{f^3(x)}{3}\,d\theta\,dx = \frac{2\pi}{3} \int_\varepsilon^1 \frac{f^3(x)}{x\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_\varepsilon^1 e^{-3x}\,dx = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{e^{-3x}}{-3} \right]_\varepsilon^1 = -\frac{2\pi}{9} \left[e^{-3} - e^{-3\varepsilon} \right]$$

quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\frac{2\pi}{9} \left[e^{-3} - e^{-3\varepsilon} \right] = \frac{2\pi}{9} \left[1 - e^{-3} \right]$$

Pertanto, l'integrale improprio richiesto esiste e vale $\frac{2\pi}{9}[1-e^{-3}]$.