giovedì 28 aprile 2016 14:22

DIFFERENZE DIVISE PER PUNTI COINCIDENTI

Abbiamo visto $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ quando $x_i \neq x_j$.
Vediamo come ampliarla nel caso in cui alcuni coincidono.

DEF. Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Poniamo

$$f[\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{(k+1) \text{ volte}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Si intuisce la definizione dai seguenti ragionamenti.

$$f[\underbrace{x_0, x_0}_{2 \text{ volte}}] = \lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

$$= \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}$$

$$f[\underbrace{x_0, x_0, x_0}_{3 \text{ volte}}] = \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} f[x_0, x_1, x_2] = \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} f[x_1, x_0, x_2]$$

$$= \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} \frac{f[x_0, x_2] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_1} =$$

$f[x_0, x_0] = f'(x_0)$

$$= \lim_{x_1 \to x_0} \left(\lim_{x_2 \to x_0} \frac{f[x_0, x_2] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_1} \right) =$$

$\to x_0 - x_1$

$$= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f'(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}}{x_0 - x_1} = (\text{den. comune e de l'Hôpital})$$

$$= \frac{f''(x_0)}{2} = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}$$

ESEMPIO Calcolare il polinomio di Newton che soddisfa

$$f(1) = 1 \qquad f'(1) = 4 \qquad f''(1) = 8$$
$$f(2) = 7$$

condizioni sulle derivate!

Sia $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Ho la tabella seguente

ripeto tre volte x_0 perché ho tre condizioni che riguardano x_0

$x_0 = 1$	$1 = f(x_0)$			
		$f[x_0, x_0] = 4$		
$x_0 = 1$	$1 = f(x_0)$		$f[x_0,x_0,x_0] = \frac{8}{2!} = 4$	
		$f[x_0, x_0] = 4$		$f[x_0,x_0,x_0,x_1] = -2$
$x_0 = 1$	$1 = f(x_0)$		$f[x_0,x_0,x_1] = 2$	
		$f[x_0,x_1] = \frac{7-1}{2-1} = 6$		
$x_1 = 2$	$7 = f(x_1)$			

$$f[x_0,x_0,x_1] = \frac{f[x_0,x_1] - f[x_0,x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{6-4}{2-1} = 2$$

$$f[x_0,x_0,x_0,x_1] = \frac{f[x_0,x_0,x_1] - f[x_0,x_0,x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2-4}{2-1} = -2$$

Il polinomio è quindi

$$P(x) = 1 + 4(x-1) + 4(x-1)(x-1) - 2(x-1)(x-1)(x-1)$$
$$= 1 + 4(x-1) + 4(x-1)^2 - 2(x-1)^3.$$

Fare la verifica:

$P(1) = 1 \Rightarrow P(1) = 1 + 4(1-1) + 4(1-1)^2 - 2(1-1)^3 = 1$

$P(2) = 7 \Rightarrow P(2) = 1 + 4(2-1) + 4(2-1)^2 - 2(2-1)^3 =$

$P'(1) = 4 \Rightarrow P'(x) = 4 + 8(x-1) - 6(x-1)^2 \Rightarrow P'(1) = 4$

$P''(1) = 8 \Rightarrow P''(x) = 8 - 12(x-1) \Rightarrow P''(1) = 8$

Pag. 3

giovedì 28 aprile 2016 14:22

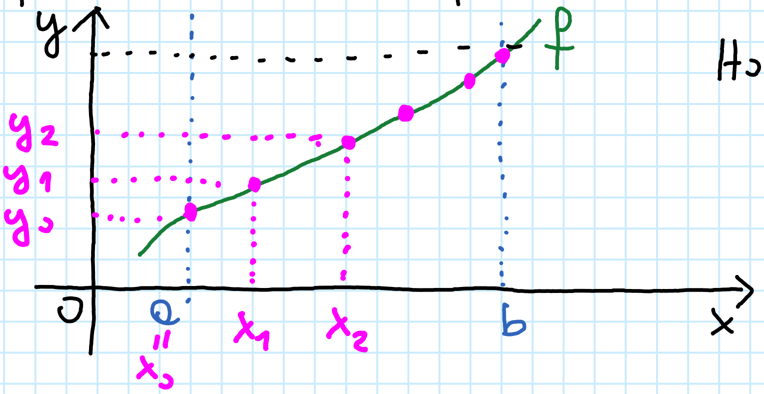
Supponendo che il polinomio sia un sostituto di una funzione f, ho, ad esempio,

$$f(1,5) \approx P(1,5) = 1 + 4(1,5-1) + 4(1,5-1)^2 - 2(1.5-1)^3 = 3.75$$

$$f'(1,5) \approx P'(1,5) = \dots$$

INTERPOLAZIONE INVERSA

Supponiamo di avere f invertibile in $[a, b]$.



Ho visto finora

$$f(x) \approx P(x), \quad x \in [a, b]$$

L'interpolazione inversa risolve il problema di approssimare f^{-1}:

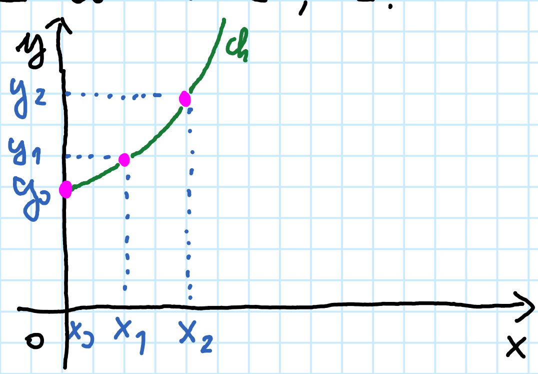
$$\boxed{f^{-1}(y) \approx Q(y), \quad y \in [f(a), f(b)]}$$

Basta costruire la tabella delle diff. divise in cui SCAMBIO I RUOLI di x con y.

ESEMPIO Sia $f(x) = ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ con $x \in [0, 1]$.

Considero i nodi

$x_0 = 0$	$f(x_0) = 1 = y_0$
$x_1 = 0.5$	$f(x_1) = 1.12763 = y_1$
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 1.54308 = y_2$



Per trovare $Q(y)$ considero i nodi y_0, y_1, y_2 e costruisco la tabella

$y_0 = 1$	0	$\dfrac{0.5 - 0}{1.12763 - 1} = 3.91757$	$= -4.99753$
$y_1 = 1.12763$	0.5		$\dfrac{1.20351 - 3.91757}{1.54308 - 1} =$
$y_2 = 1.54308$	1	$\dfrac{1 - 0.5}{1.54308 - 1.12763} = 1.20351$	

È

$$Q(y) = 0 + 3.91757(y-1) - 4.99753(y-1)(y-1.12763)$$

Noto $Q(y)$ posso rispondere (in modo approssimato) alla questione seguente: dato $\bar{y}$, trovare $\bar{x}$ tale che

$$f(\bar{x}) = \bar{y} \quad (*)$$

valuto Q in $\bar{y}$

sostituendo $(*)$ con $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y}) \approx Q(\bar{y})$

Nel caso precedente per $\bar{y} = 1.3$ ho $Q(\bar{y}) = \underline{0.91684}$ (contro il valore vero $\underline{0.75643}$).

APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI

Dati gli $(m+1)$ nodi x_i, $i = 0, \dots, m$ e gli $(m+1)$ valori y_i, $i = 0, \dots, m$ (eventualmente provenienti dalla valutazione di una funzione f : $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, m$), cerchiamo il POLINOMIO $P_n(x)$ di grado $n \le m$ (tipicamente è $n <<<< m$) che rende MINIMA la quantità

$$S = \sum_{i=0}^{m} [P_n(x_i) - y_i]^2$$

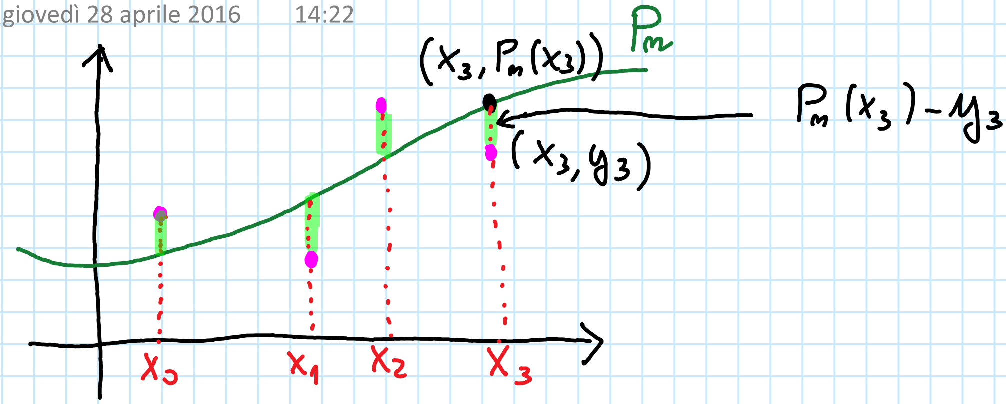
$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{m} [\underbrace{(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n)}_{= P_n(x_i)} - y_i]^2$$

$$= S(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Il polinomio P_n che rende minima S è detto POLINOMIO DI APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI.

Interpretiamo S a livello grafico:



S è la somma dei quadrati dei segmenti verdi. Il polinomio ai minimi quadrati minimizza questa somma.

ESEMPIO

Consideriamo il caso $n = 1$:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x$$

Ho

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{m} [P_n(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=0}^{m} [a_0 + a_1 x_i - y_i]^2$$

Devo trovare a_0 ed a_1 che rendono minima $S(a_0, a_1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{m} \cancel{2}(a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \sum_{i=0}^{m} \cancel{2}(a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot x_i = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} a_0 + \sum_{i=0}^{m} a_1 x_i - \sum_{i=0}^{m} y_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{m} a_0 x_i + \sum_{i=0}^{m} a_1 x_i^2 - \sum_{i=0}^{m} y_i x_i = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (m+1)\, a_0 + \left(\sum_{i=0}^{m} x_i\right) a_1 = \sum_{i=0}^{m} y_i \\ \left(\sum_{i=0}^{m} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=0}^{m} y_i x_i \end{cases}$$

È un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite a_0 ed a_1.

Si dimostra che il punto (a_0, a_1) soluzione del sistema precedente è un PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO per S

OSS. Il sistema precedente permette di vedere che il polinomio (RETTA DI REGRESSIONE)

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

passa per il BARICENTRO dei punti (x_i, y_i) dato da

$$G = (x_G, y_G) = \left(\frac{\sum_{i=0}^{m} x_i}{m+1} , \frac{\sum_{i=0}^{m} y_i}{m+1} \right)$$

dato che, dalla prima equazione, ho

$$(m+1)\, a_0 + \left(\sum_{i=0}^{m} x_i \right) a_1 = \sum_{i=0}^{m} y_i$$

Dividendo per $m+1$ ho

$$\underbrace{a_0 + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{m} x_i}{m+1}}_{x_G} a_1}_{P_1(x_G)} = \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{m} y_i}{m+1}}_{y_G}$$

OSS. Il sistema lineare precedente può essere scritto in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^{m} x_i^{1} \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^{1} & \sum_{i=0}^{m} x_i^{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} y_i \\ \sum_{i=0}^{m} y_i x_i^{1} \end{pmatrix}$$

matrice SIMMETRICA

ESEMPIO Calcoliamo la retta di regressione ai minimi quadrati associata a

	x_0	x_1	x_2	$x_3 = m$
x_i	0	2	3	4
y_i	1	1	2	3

Il sistema lineare che dà i coefficienti di $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ è

$\to$ è il numero di punti che ho a disposizione!

$$\begin{pmatrix} 3+1 & \sum_{i=0}^{3} x_i \\ \sum_{i=0}^{3} x_i & \sum_{i=0}^{3} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{3} y_i \\ \sum_{i=0}^{3} y_i x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$1 + 1 + 2 + 3$

$= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3\ 4$

$0 + 2 + 3 + 4$

$0^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

Risolvendolo ho $a_0 = \frac{23}{35}$, $a_1 = \frac{17}{35}$ e quindi

$P_1(x) = \frac{23}{35} + \frac{17}{35} x$. Il valore minimo corrispondente di S vale

$$S\left(\frac{23}{35}, \frac{17}{35}\right) = \sum_{i=0}^{3} \left[\frac{23}{35} + \frac{17}{35} x_i - y_i\right]^2 = \frac{24}{35}.$$