Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova d'esame (04/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Tema A

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$ (04/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. __________ Corso __________
IN STAMPATELLO — VR ······ — A-E / F-O / P-Z

Tema A

**** Svolgere prima i punti* (a) *di <u>tutti</u> gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). ***** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

(1) (a) Dato il punto $A(2,3,-1)$ e i vettori $\vec{u}=(1,-2,-1)$ e $\vec{v}=(0,3,2)$, determinare in forma parametrica e cartesiana il piano Π passante per A e ortogonale a $\vec{u}$ e la retta r passante per A e parallela a $\vec{v}$. Calcolare poi l'area del parallelogramma compreso tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Detta Γ la parabola $y=x-x^2$ del piano orizzontale, trovare il punto di Γ più vicino a Π.

(2) Studiare l'andamento di $f(x)=\dfrac{e^x-2}{|x|-1}$, e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_0^3 \left(\sqrt{x+1}-2x\log(x+1)\right)\,dx$.

(b) Disegnare $S=\{(x,y): y\le e^{-x},\ |y|-1\le x\le 1\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x,y)=\dfrac{x^2+y^2-2y}{x-y}$, determinarne dominio, zeri, segno, curve di livello e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali.

(b) Disegnare $\mathcal{T}=\{(x,y): x\le y-2\le 0\,, x+2\ge 0\}$, e determinare gli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$. Si può cercare di dare un'interpretazione geometrica dei risultati?

(5) (a) Studiare a priori la crescenza delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $(x^2-1)y'+2y=0$, e determinarne (possibilmente in due modi) la soluzione tale che $y(0)=2$ e la soluzione tale che $y(2)=0$.

(b) Determinare, prima per $\alpha=1$ e poi eventualmente al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, l'unica soluzione dell'equazione differenziale $y''-2y'+y=2e^{\alpha x}+x$ tale che $y(0)=2$ e $y'(0)=0$.

[1] Non è richiesto lo studio della convessità.

Matematica e Statistica (A-E)

Prova di $\boxed{\text{STATISTICA (A-E) - Gobbi}}$ (04/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

Tema A

**** Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare **** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

ESERCIZIO 1

Data la seguente distribuzione di frequenze presentata in tabella:

X	f
2	25
4	50
5	44
10	61

Calcolare:
a) media aritmetica, media armonica e media geometrica;
b) mediana e moda;
c) la varianza con un metodo a scelta.

ESERCIZIO 2

Sui dati presentati in tabella effettuare un test di omogeneità fra la distribuzione di frequenze osservate f e la distribuzione teorica F ad un livello di significatività del 2,5%.

X	f	F
1	60	42
2	40	66
3	45	49
4	55	43

ESERCIZIO 3

Una ricerca sulla relazione fra quantità assunta di un integratore a base di vitamina D e il rischio di osteoporosi ha dato i seguenti risultati:

Quantità di vitamina D	Rischio osteoporosi
0	45
4	20
7	27
14	8

Sui dati presentati in tabella:
(a) interpolare le due distribuzioni con una retta Y'=a+bX;
(b) calcolare il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;
(c) giudicare la bontà di accostamento.

Allegato: valori della variabile "Chi Quadrato" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	alpha %							
	99,5	99	97,5	95	5	2,5	1	0,5
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	11,07	12,83	15,09	16,75

Matematica e Statistica (F-O, P-Z)

Prova di **STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma** (04/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ________________________ Matr. ____________
IN STAMPATELLO VR ······

Tema A

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

Esercizio 1)
Nella tabella seguente viene riportata la distribuzione delle assenze relative all'intero anno scolastico 2009/2010 di una classe IV superiore.

Giorni di assenza	4	5	8	11	16	18	19	25	28
Frequenza	3	2	1	4	5	2	1	4	6

Determinare
a) La tipologia del carattere.
b) Un indice sintetico di posizione.
c) Se possibile, un indice sintetico di variabilità.
d) Una rappresentazione grafica adeguata.
e) L'eventuale presenza di outlier.

Esercizio 2)
E' data la seguente tabella di ricavata da un indagine svolta su 200 lavoratrici di un industria per conoscere le preferenze riguardo all'orario di lavoro in relazione allo stato civile.

		Y:stato civile		
		Nubili	Coniugate	Vedove
X:orario preferito	Diviso (oltre 2 ore di pausa)	12	20	18
	Continuato con breve interruzione	36	50	14
	Continuato senza interruzione	20	20	10

Il candidato
a) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione
b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità
c) Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Esercizio 3)
L'istituto descritto nell'esercizio 1 dichiarava nel A.S. 2008/2009 che il valore atteso delle assenze fosse di 10 gg per una classe IV. Considerando la classe illustrata nell'esercizio 1 come campione è possibile confermare tale asserzione?

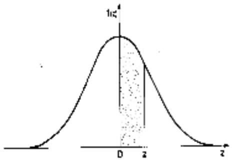
Esercizio 4)
Si considerino i seguenti eventi legati all'estrazione di una delle lavoratrici descritte nell'Esercizio 2.

E_1 : si estragga una lavoratrice sposata
E_2: si estragga una lavoratrice che preferirebbe avere un orario continuato

a) Il candiato calcoli le seguenti Probabilità $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
b) Il candiato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti.

Tavola I

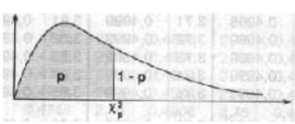
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



v \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

$\boxed{\text{Tema A}}$ - Soluzioni

$\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$

(1) (a) Il piano Π passante per $A(2,3,-1)$ e ortogonale a $\vec{u}=(1,-2,-1)$ ha equazione cartesiana del tipo $x-2y-z+k=0$, e il passaggio per A dà $k=3$: dunque $x-2y-z+3=0$. Due vettori ortogonali a $\vec{u}$ (dunque paralleli a Π) e non paralleli tra loro sono ad esempio $\vec{v}_1=(2,1,0)$ e $\vec{v}_2=(1,0,1)$, da cui la forma parametrica $\Pi=\{(x,y,z)=(2,3,-1)+s(2,1,0)+t(1,0,1):s,t\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,z)=(2+2s+t,3+s,-1+t):s,t\in\mathbb{R}\}$. D'altra parte, la retta r passante per A e parallela a $\vec{v}=(0,3,2)$ ha forma parametrica $r=\{(x,y,z)=(2,3,-1)+t(0,3,2):t\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,z)=(2,3+3t,-1+2t):s,t\in\mathbb{R}\}$; sostituendo $t=\frac{1}{2}(z+1)$ in $(x,y)=(2,3+3t)$ si ottiene la forma cartesiana data dal sistema tra $x=2$ e $2y-3z-9=0$. Infine, il prodotto vettoriale tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$ risulta $\vec{u}\wedge\vec{v}=(-1,-2,3)$, dunque l'area del parallelogramma compreso tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\sqrt{14}$.

(b) La distanza di un punto generico $P(x)=(x,x-x^2,0)$ della parabola Γ dal piano Π è $d(x)=\frac{|x-2(x-x^2)-0+3|}{\sqrt{6}}=\frac{2x^2-x+3}{\sqrt{6}}$. Derivando si ottiene $d'(x)=\frac{4x-1}{\sqrt{6}}$, dunque $d'(x)\geq 0$ quando $x=\frac{1}{4}$: ne otteniamo che il punto di Γ più vicino a Π è $P(\frac{1}{4})=(\frac{1}{4},\frac{3}{16},0)$, la cui distanza è $d(\frac{1}{4})=\frac{23}{8\sqrt{6}}\sim 1{,}2$.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x)=\frac{e^x-2}{|x|-1}$ è definita per $x\neq\mp 1$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio tranne che in $x=0$ dove è continua (con $f(0)=1$) ma è previsto un punto angoloso a causa del modulo; non ha parità ne' periodicità. Si ha $f(x)=0$ quando $x=\log 2\sim 0{,}7$; quanto al segno, il numeratore è >0 per $x>\log 2$ e il denominatore per $x<-1$ oppure $x>1$, dunque vale $f(x)>0$ per $-1<x<\log 2$ e per $x>1$. I limiti interessanti valgono $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0^-$, $\lim_{x\to-1^{\mp}}f(x)=\lim_{x\to 1^{\mp}}f(x)=\mp\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-2}{x-1}=+\infty$ (l'unico limite in forma indeterminata era quest'ultimo, e per calcolarlo basta ricordare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ o applicare de l'Hôpital). Pertanto $y=0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$, mentre a $+\infty$ non c'è alcun asintoto lineare (infatti $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$). Derivando per $x\neq 0$ e posto $\sigma:=\operatorname{sign}x$, si ottiene $f'(x)=\frac{e^x(|x|-1)-\sigma(e^x-2)}{(|x|-1)^2}$. Per $x<0$ si ha $f'(x)=\frac{e^x(-x-1)-(-1)(e^x-2)}{(-x-1)^2}=-\frac{xe^x+2}{(x+1)^2}$: si ha $xe^x+2>0$ se e solo se $x<-2e^{-x}$, che un confronto grafico mostra essere sempre vero, pertanto $f'(x)<0$ per ogni $x<0$, dunque f decresce strettamente per $x<0$. Per $x>0$ si ha invece $f'(x)=\frac{e^x(x-1)-(e^x-2)}{(x-1)^2}=\frac{(x-2)e^x+2}{(x-1)^2}$: vale dunque $f'(x)\geq 0$ se e solo se $(x-2)>-2e^{-x}$, e un altro confronto grafico mostra che esiste un punto $x_0\in]1,2[$ (vale in realtà $x_0\sim 1{,}6$) tale che che ciò accade per $x>x_0$. Pertanto f decresce in $[1,x_0]$ e cresce dopo: ammette dunque un minimo relativo in x_0. Notiamo anche che i limiti $\lim_{x\to 0^-}f'(x)=-2$ e $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=0$ esistono finiti ma diversi tra loro, dunque in 0 c'è il previsto punto angoloso.

(3) (a) Vale $\int(\sqrt{x+1}-2x\log(x+1))\,dx=\int\sqrt{x+1}\,dx-\int 2x\log(x+1)\,dx=\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}-(x^2\log(x+1)-\int x^2\frac{1}{x+1}\,dx)=\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}-x^2\log(x+1)+\int(x-1+\frac{1}{x+1})\,dx=\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}-x^2\log(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x+\log(x+1)+k$, dunque $\int_0^3(\sqrt{x+1}-2x\log(x+1))\,dx=(\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}-(x^2-1)\log(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x]_0^3=(\frac{(4)^{3/2}}{3/2}-8\log 4+\frac{9}{2}-3)-(\frac{1^{3/2}}{3/2})=\frac{37}{6}-16\log 2\sim -4{,}9$.

(b) (Figura 2) La zona di piano $S=\{(x,y):y\leq e^{-x}\,,\ |y|-1\leq x\leq 1\}$ ha area $\int_{-1}^0(x+1)\,dx+\int_0^1 e^{-x}\,dx+\int_1^{-1}(-x-1)\,dx=(\frac{1}{2}x^2+x]_{-1}^0+(-e^{-x}]_0^1+(-\frac{1}{2}x^2-x]_1^{-1}=(0)-(-\frac{1}{2})+(-e^{-1})-(-1)+(\frac{1}{2})-(-\frac{3}{2})=\frac{7}{2}-\frac{1}{e}\sim 3{,}1$.

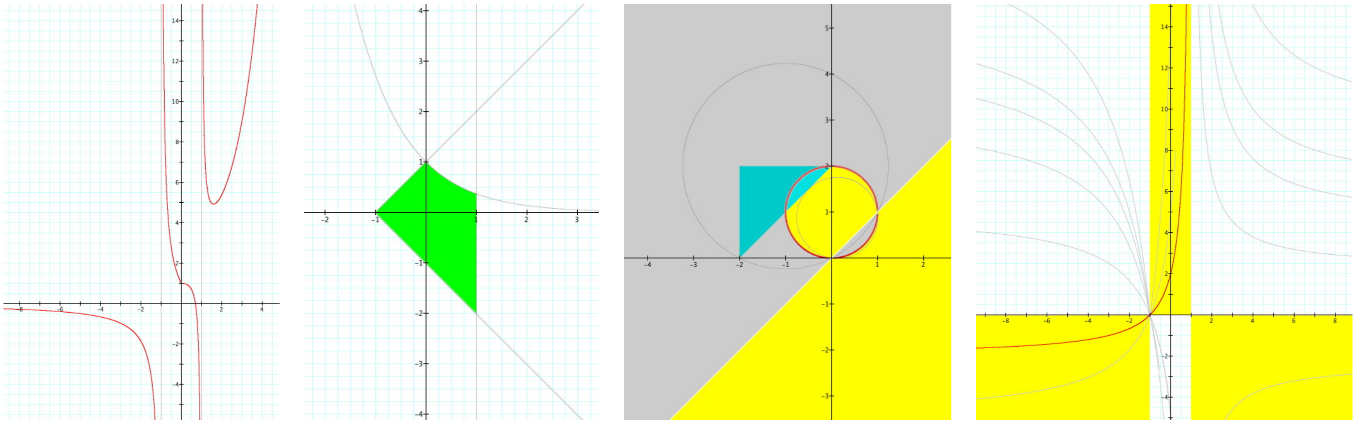
(4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x,y)=\frac{x^2+y^2-2y}{x-y}$ è dato da $x-y\neq 0$ (vanno tolti i punti della retta bisettrice $y=x$); si tratta di una funzione differenziabile, in quanto le derivate parziali (vedi sotto) risultano continue. La funzione si annulla quando $x^2+y^2-2y=0$, ovvero sui punti della circonferenza di centro $C(0,1)$ e raggio 1; vanno però esclusi i punti $O(0,0)$ e $A(1,1)$, che sono le intersezioni della circonferenza con la retta $y=x$ e dunque non stanno nel dominio. Il numeratore è >0 fuori della circonferenza e <0 dentro; il denominatore è >0 sotto la bisettrice e <0 sopra; il segno di g ne segue per quoziente. Le curve di livello $g(x,y)=k$ sono date da $x^2+y^2-2y=k(x-y)$, ovvero $x^2+y^2-kx-(2-k)y=0$: si tratta dunque di circonferenze tutte passanti per l'origine e di centro variabile $C_k(\frac{k}{2},1-\frac{k}{2})$ (naturalmente vale $C_0=C$): da $(x,y)=(\frac{k}{2},1-\frac{k}{2})$ si ricava $y=1-x$, dunque è su tale retta che si muovono i centri C_k al variare di $k\in\mathbb{R}$. I limiti interessanti sono nei vari punti della retta bisettrice $y=x$ e in ∞_2. In un qualsiasi punto della bisettrice diverso da O e da A il limite vale chiaramente $\mp\infty$ a seconda del lato del dominio da cui si tende al punto stesso. Invece in 0 e in A il limite non esiste: per vederlo notiamo che tendendo a tali punti lungo la circonferenza $x^2+y^2-2y=0$ il limite sarebbe 0, mentre

tendendo a O lungo l'asse y (o tendendo a A lungo la retta $y = 1$) il limite sarebbe 2. Un po' più delicata è la questione del limite in ∞_2: preso un qualsiasi $k > 0$ la disequazione $|g(x, y)| > k$ è soddisfatta al di fuori delle circonferenze $g(x, y) = \mp k$, dunque più si va lontani dall'origine e più la funzione ha valore assoluto alto, e ciò indica che il limite vale $\mp\infty$, a seconda che si tenda a ∞_2 da sopra o da sotto la bisettrice $y = x$.
Le derivate parziali sono $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2x(x-y)-(x^2+y^2-2y)}{(x-y)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{(2y-2)(x-y)+(x^2+y^2-2y)}{(x-y)^2}$; dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ricava $x^2 + y^2 - 2y = 2x(x - y) = -2(y - 1)(x - y)$, da cui necessariamente $2x(x - y) = -(2y - 2)(x - y)$ ovvero $(x + y - 1)(x - y) = 0$, che dà $y = x$ oppure $y = 1 - x$; nel primo caso, da $x^2 + y^2 - 2y = 2x(x - y)$ si ottengono le soluzioni $O(0, 0)$ e $A(1, 1)$ che però non sono accettabili in quanto fuori dal dominio, mentre nel secondo non si ottengono soluzioni. Pertanto la funzione è priva di punti stazionari e dunque, essendo differenziabile, non ha alcun estremo locale.

(b) (Figura 3) Per la ricerca degli estremi assoluti di g sul triangolo $\mathcal{T} = \{(x, y) : x \le y - 2 \le 0\,, x + 2 \ge 0\}$ (che esistono in base a Weierstrass) dividiamo $\mathcal{T}$ nelle zone $\mathcal{T}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{T}_1 = \{(x, 2) : -2 < x < 0\}$, $\mathcal{T}_2 = \{(-2, y) : 0 < y < 2\}$ e $\mathcal{T}_3 = \{(x, x + 2) : -2 < x < 0\}$ dei suoi lati privati dei vertici; e $\mathcal{T}_4 = \{D(-2, 0),\ E(-2, 2),\ F(0, 2)\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g ma, come visto, non ce ne sono. • Sul lato $\mathcal{T}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x) := g(x, 2) = \frac{x^2}{x-2}$ con $-2 < x < 0$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, ma ciò avviene per $x = 0$ e $x = 4$, che non sono accettabili. • Sul lato $\mathcal{T}_2$ la funzione vale $\varphi_2(y) := g(-2, y) = -\frac{y^2-2y+4}{y+2}$ con $0 < y < 2$. La derivata $\varphi_2'(y) = \frac{y^2+4y-8}{(y+2)^2}$ si annulla per $y = 2(\mp\sqrt{3} - 1)$, delle quali solo $2(\sqrt{3} - 1) \sim 1{,}4$ è accettabile. Si trova dunque un nuovo punto $G(-2, 2(\sqrt{3} - 1))$. • Sul lato $\mathcal{T}_3$ la funzione vale $\varphi_3(x) := g(x, x + 2) = -(x^2 + x)$ con $-2 < x < 0$. La derivata $\varphi_3'(x) = -(2x + 1)$ si annulla per $x = -\frac{1}{2}$, e si trova dunque un ulteriore nuovo punto $H(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. • Infine, i tre punti D, E, F di $\mathcal{T}_4$ vanno tutti tenuti presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei cinque punti D, E, F, G, H: poiché $f(D) = -2$, $f(E) = -1$, $f(F) = 0$, $f(G) = 6 - 4\sqrt{3} \sim -0{,}8$ e $f(H) = \frac{1}{4}$, il massimo assoluto di g su $\mathcal{T}$ è $\frac{1}{4}$ (assunto in H) e il minimo assoluto è -2 (assunto in D). L'interpretazione grafica richiesta è legata alla conoscenza delle curve di livello fatta in precedenza: si noti (vedi Figura 3) che H e D sono proprio i punti di $\mathcal{T}$ che giacciono sulle curve di livello di g di valore rispettivamente più basso e più alto possibile.

(5) (a) (Figura 4) Da $(x^2-1)y'+2y = 0$ si ricava che $(x^2-1)y' = -2y$: ciò implica che eventuali soluzioni $y(x)$ definite in $x = \mp 1$ devono necessariamente annullarsi in tali punti. Al di fuori di quei due punti si ha $y' = -\frac{2y}{x^2-1}$, dunque le soluzioni sono crescenti dove la funzione al secondo membro è positiva (vedi figura). • Iniziamo risolvendo l'equazione come a variabili separabili. La soluzione tale che $y(2) = 0$ è quella nulla $y \equiv 0$. Invece per la soluzione con $y(0) = 2$, separando le variabili e integrando si ottiene $\int \frac{1}{y}\,dy = \int(-\frac{2}{x^2-1})\,dx = \int(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1})\,dx$ da cui $\log|y| = \log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + k$, ovvero $y = h\frac{x+1}{x-1}$ con $h \in \mathbb{R}$ (essendo il dato iniziale riferito a $x = 0$, si intende che $-1 < x < 1$): imponendo infine che $y(0) = 2$ si ottiene $h = -2$, da cui $y(x) = -2\frac{x+1}{x-1}$. • Interpretando invece l'equazione come lineare, portata nella forma $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = \frac{2}{x^2-1}$ e $q(x) = 0$, essendo $P(x) = \int p(x)\,dx = \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, si ottiene $y = h\frac{x+1}{x-1}$ con $h \in \mathbb{R}$; imponendo poi che $y(0) = 2$ oppure che $y(2) = 0$ si ottiene rispettivamente $h = -2$ oppure $h = 0$.

(b) L'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 2e^{\alpha x} + x$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 - 2t + 1 = 0$ ha soluzione doppia $t = 1$, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo $y(x) = (A + Bx)e^x$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • Posto $\alpha = 1$, il secondo membro diventa $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ con $b_1(x) = 2e^x$ e $b_2(x) = x$. Una soluzione particolare per $b_1(x)$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ux^2e^x$ per un certo $u \in \mathbb{R}$: essendo $\tilde{y}_1'(x) = u(x^2+2x)e^x$ e $\tilde{y}_1''(x) = u(x^2+4x+2)e^x$ si ricava $\tilde{y}_1'' - 2\tilde{y}_1' + \tilde{y}_1 = 2ue^x = 2e^x$ da cui $u = 1$, pertanto $\tilde{y}_1(x) = x^2e^x$. Una soluzione particolare per $b_2(x)$ sarà invece del tipo $\tilde{y}_2(x) = ux + v$ per certi $u, v \in \mathbb{R}$: essendo $\tilde{y}_2'(x) = u$ e $\tilde{y}_2''(x) = 0$ si ricava $\tilde{y}_2'' - 2\tilde{y}_2' + \tilde{y}_2 = ux + (v - 2u) = x$ da cui $u = 1$ e $v = 2u = 2$, pertanto $\tilde{y}_2(x) = x + 2$. Le soluzioni dell'equazione completa saranno pertanto $y(x) = (A + Bx)e^x + x^2e^x + x + 2$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$; imponendo infine che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$ si ottiene $A = 0$ e $B = -1$, ovvero $y(x) = (x^2 - x)e^x + x + 2$. • Nel caso in cui invece $\alpha \ne 1$, cambia solo la soluzione particolare di $y'' - 2y' + y = 2e^{\alpha x}$ che sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ue^{\alpha x}$ per un certo $u \in \mathbb{R}$: essendo $\tilde{y}_1'(x) = u\alpha e^{\alpha x}$ e $\tilde{y}_1''(x) = u\alpha^2 e^{\alpha x}$ si ricava $\tilde{y}_1'' - 2\tilde{y}_1' + \tilde{y}_1 = u(\alpha^2 - 2\alpha + 1)e^{\alpha x} = 2e^{\alpha x}$ da cui $u = \frac{2}{\alpha^2-2\alpha+1}$, pertanto $\tilde{y}_1(x) = \frac{2}{(\alpha-1)^2}e^{\alpha x}$. Le soluzioni dell'equazione completa saranno pertanto $y(x) = (A + Bx)e^x + \frac{2}{(\alpha-1)^2}e^{\alpha x} + x + 2$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$; e imponendo che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$ si ottiene $A = -\frac{2}{(\alpha-1)^2}$ e $B = -\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$.



1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g; il triangolo $\mathcal{T}$ (azzurro), e le curve di livello (grigie) che toccano $\mathcal{T}$ col valore più alto e più basso possibili per g. **4.** Ex. (5.a): zone di crescenza (giallo), alcune soluzioni (grigio), la soluzione tale che $y(0) = 2$ (rosso).

STATISTICA (A-E) - Gobbi

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) la varianza con un metodo a scelta.

X	f	X*f	f/X	ln(X)	ln(X)*f	X^2	X^2*f
2	25	50	12,5	0,6931	17,3287	4	100
4	50	200	12,5	1,3863	69,3147	16	800
5	44	220	8,8	1,6094	70,8153	25	1100
10	61	610	6,1	2,3026	140,4577	100	6100
	180	**1080**	**39,9**	**5,9915**	**297,9164**		**8100**

a) Calcolo della media aritmetica, armonica e geometrica:

M(X) = $\dfrac{\Sigma X * f}{\Sigma f} = \dfrac{1080}{180} =$ **6**

Ma(X) = $\dfrac{\Sigma f}{\Sigma f/x} = \dfrac{180}{39{,}9} =$ **4,511**

ln(Mg(X))= $\dfrac{\Sigma \ln(X) * f}{\Sigma f} = \dfrac{297{,}9164}{180} =$ **1,6551** **Mg(X) =** $e^{1,6551} =$ **5,234**

b) Calcolo della mediana e della moda:

X90° =< mediana =< X91° : **me = 5**

moda = **10**

c) Calcolo della varianza (usando ad esempio il secondo metodo):

V(X) = $M(X^2) - m(X)^2 =$ 8100/180 - 6^2 = **9**

ESERCIZIO 2

Sui dati presentati in tabella effettuare un test di omogeneità fra la distribuzione di frequenze osservate f e la distribuzione teorica F ad un livello di significatività del 2,5%.

X	f	F	$(f-F)^2/F$
1	40	42	0,095
2	60	66	0,545
3	45	49	0,327
4	55	43	3,349
	200	**200**	**4,316**

Calcolo del Chi Quadrato:

ChiQc = **4,316**

Si individua sulle tavole del Chi Quadrato il valore teorico da confrontare:

ni=n-1=4-1= **3** gdl alpha = 2,5%

ChiQt = **9,35**

Poiché ChiQc < ChiQt si accetta l'ipotesi di omogeneità fra le due distribuzioni.

ESERCIZIO 3

Una ricerca sulla relazione fra quantità assunta di un integratore a base di vitamina D e il rischio di osteoporosi ha dato i seguenti risultati:

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
0	45	0	0	2025
4	20	80	16	400
7	27	189	49	729
14	8	112	196	64
25	**100**	**381**	**261**	**3218**

Sui dati presentati in tabella:
a) interpolare le due distribuzioni con una retta;
b) calcolare il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;
c) giudicare la bontà di accostamento.

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)}$ $\quad$ $a = M(Y) - bM(X)$

$M(X) = \frac{25}{4} = \mathbf{6,25}$

$M(Y) = \frac{100}{4} = \mathbf{25}$

$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{381}{4} - 6,25 * 25 = \mathbf{-61}$

$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{261}{4} - 6,25\text{^}2 = \mathbf{26,1875}$

$\mathbf{b} = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{-61}{26,1875} = \mathbf{-2,3294}$

$\mathbf{a} = M(Y) - bM(X) = 25 - 3,1036*6,25 = \mathbf{39,5585}$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\ \sigma(Y)}$

$V(Y) = \frac{3218}{4} - 25\text{^}2 = \mathbf{179,5}$

$\sigma(Y) =$ RADQ(179,5) = **13,3978**

$\sigma(X) =$ RADQ(26,1875) = **5,1174**

$\mathbf{r} = \frac{-61}{13,3978 * 5,1174} = \mathbf{-0,8897}$ **Si registra una forte relazione lineare indiretta**

c) Giudicare la bontà di accostamento:

Per giudicare la bontà di accostamento del modello teorico, calcolo il coefficiente di determinazione:

$\mathbf{r^2} =$ (-0,8897)^2= **0,7916**

Il modello teorico spiega in maniera buona la variabilità delle frequenze osservate.

Esercizio 1)

a) Determinare la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) discreto (in quanto le modalità sono numero naturali e concettualmente limitate ad un numero massimo pari ai giorni di lezione presenti nell'anno scolastico)

b) Un indice sintetico di posizione.

Un carattere di tipo quantitativo ammette tre indici sintetici di posizione: la moda, la mediana e media. Un indice idoneo in questo caso è la mediana, in quanto risulta poco affetto dalla presenza di eventuali outlier (una persona che ha fatto una grave malattia o un incidente...)

Per calcolare la mediana si deve valutare la numerosità della popolazione (N=28) facilmente ottenubile comulando le frequenze assolute

Giorni di assenza	**4**	**5**	**8**	**11**	**16**	**18**	**19**	**25**	**28**
Frequenza	3	2	1	4	5	2	1	4	6
F. ass. cumulata	*3*	*5*	*6*	*10*	*15*	*17*	*18*	*22*	*28*

Dopo di che, la mediana è il valore che bipartisce la popolazione, ovvero, una volta ordinate le osservazioni si ricerca quella che lascia alla sua destra (N-1)/2 = 13,5 elementi. Poichè non esiste il l'osservazione di posto 14,5 viene preso come mediana la media fra il 14° ed 15° valore. Analizzando le frequenze cumulate si ottiene che ambo le osservazioni mostrano la modalità 16. Pertanto la mediana (q2) è 16

c) Se possibile, un indice sintetico di variabilità.

Un carattere di tipo quantitativo ammette quattro indici sintetici di varaibilità: il range (o campo di variazione) la distanza interquartile, la varianza e la devizione standard (o scarto quadratico medio). Avendo illustrato la mediana come indice di posizione la scelta più logica per l'indice di variabilità connesso è quella di utilizzare la distanza interquartile che si basa sullo stesso concetto. Infatti essa rappresenta la differenza fra il primo (q1) edi l terzo (q3) quartile. Dave q1, una volta ordinate le osservazioni, lascia alla propria sinistra (N-1)/4 = 6,75 osservazioni mentre q3 lascia alla proria destra (N-1)/4 = 6,75 osservazioni. Anche in questo caso non ottenendo numeri interi dovremo mediare le posizioni intere più vicine. Si ha dunque che

q1 = media 7° e 8° valore =11 q3 = media 21° e 22° valore =25

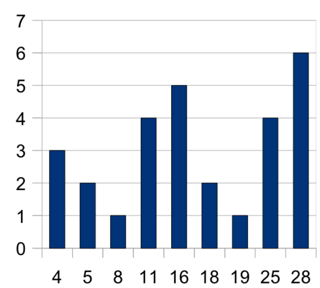
Si ha che la distanza interquartile D = q3 - q1 = 25 - 11 = 14

d) Una rappresentazione grafica adeguata.

Un carattere di tipo quantitativo le cui le modalità abbiano frequenze superiori all'unità viene solitamente rappresentato mediante un diagramma a barre.

Questo diagramma è composto da barre orizzontali (o verticali) inserite in un piano cartesiano. Il grafico riposta una barra per ogni modalità, la cui base (o altezza) viene fissata e centrata nel valore della modalità corrispondente mentre la sua altezza (o base) raggiunge la relativa frequenza assoluta.

A lato si riporta il digramma a barre ricavato dalla distribuzione in esame



e) L'eventuale presenza di outlier.

Un modo per individuare gli outlier (ovvero valori troppo distanti dalla statistica e probabilmente erronei) è quello di ricorrere alla definizione di Valore Adiacente Superiore e di Valore Adiacente Inferiore, per individuare i valori rispettivamente troppo alti o troppo bassi. Questi limiti vengono calcolati sottraendo al primo quatile K volte la distanza interquartile (VAI) e sommando al terzo quartile K volte la distanza interquartile (VAS). I valori esterni all'intervallo VAI-VAS vengono considerati outlier. Tipici valori di K sono 1, 1.5 e 2. Utilizzando K = 1 si ha che

VAI = 11- 14 = -3 VAS = 25 + 1*14 = 39

Non esistendo alcuna osservazioni esterna all'intervallo [-3 ; 39] possiamo concludere che la popolazione presumibilmente non presenta outlier.

Esercizio 2)

L'esercizio verte sull'analisi di una serie bivariata, ottenuta misurando due caratteri qualitativi non ordinabili.

a) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando due caratteri qualitativi non ordinabili ammette un solo indice sintetici di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la modalità della serie corrispondente alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 50 da cui si ha le seguente moda

(Continuato con breve interruzione ; Coniugate)

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando due caratteri qualitativi non ordinabili non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

c) Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Per verificare se i due caratteri sono indipiendeti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficiente mente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendeza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadranto avente gradi di libertà paria quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n\,\hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+}\,n_{+,j}}{n} \qquad \forall i,j$$

nella tabella si ripotano le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi

		Y:stato civile			Totali
		Nubili	Coniugate	Vedove	
X:orario preferito	Diviso (oltre 2 ore di pausa)	12 (17)	20 (22,5)	18 (10,5)	50
	Continuato con breve interruzione	36 (34)	50 (45)	14 (21)	100
	Continuato senza interruzione	20 (17)	20 (22,5)	10 (10,5)	50
Totali		68	90	42	200

A questo punto è possibile valutare la convergenza dell stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione è verificata si può procedere al calcolo della regione di accettazione fissato il livello di significatività al 5%.

$$A=\left[0\,;\chi^2_{1-\alpha}\left((M_x-1)(M_y-1)\right)\right]=\left[0\,;\chi^2_{1-0.05}\left((3-1)(3-1)\right)\right]=\left[0\,;\chi^2_{0.95}(4)\right]=\left[0\,;9.49\right]$$

Si può ora procedere al calcolo dello stimatore vero e proprio

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(n_{i,j}-\hat{n}_{i,j}\right)^2}{\hat{n}_{i,j}}=$$

$$=\frac{(12-17)^2}{17}+\frac{(20-22.5)^2}{22.5}+\frac{(18-10.5)^2}{10.5}+\frac{(36-34)^2}{34}+\frac{(50-45)^2}{45}+\frac{(14-21)^2}{21}+\frac{(20-17)^2}{17}+\frac{(20-22.5)^2}{22.5}+\frac{(10-10.5)^2}{10.5}=$$

$$\frac{25}{17}+\frac{6.25}{22.5}+\frac{56.25}{10.5}+\frac{4}{34}+\frac{25}{45}+\frac{49}{21}+\frac{9}{17}+\frac{6.25}{22.5}+\frac{0.25}{10.5}=10.94$$

Poichè il valore dello stimatore è esterno all'intervallo di accettazione posso dire che i due caratteri non sono indipendenti ad un livello di significatività del 5 per cento.

Esercizio 3)

Nel testo viene richiesto di verificare se il valore atteso della popolazione da cui si è estratto il campione indicato nell'esercizio 1 e pari a 10.
Questo test si appoggia allo stimatore media campionaria e richiede un campione la cui dimensione sia di almeno 30 elementi. Non soddisfacendo questa ipotesi non è possibie confermare o smentire l'ipotesi.

Esercizio 4)

a) Il candiato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Essendo gli eventi elementari equiprobabili, le probabilità degli eventi E_1 ed E_2 e dell'evento intersezione (estrarre donne coniugate che prefriscono orairio continuato) possono essere ricavate utilizzando la definizione classica; secondo la quale la probabilità è il rapporto dei casi favorevoli sui casi totali. Pertanto si ha che:

$$P(E_1)=\frac{90}{200}=0.45 \qquad P(E_2)=\frac{100+50}{200}=0.75 \qquad P(E_1\cap E_2)=\frac{50+20}{200}=0.35$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=\frac{90+150-70}{200}=0.85 \qquad P(E_1|E_2)=P\frac{(E_1\cap E_2)}{P(E_2)}=\frac{70}{200}\frac{200}{170}=\frac{7}{17}$$

b) Il candiato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti.

Se due eventi sono indipendenti si ha che la probabilità condizionata è data dal prodotto delle probabilità, pertanto essendo

$$P(E_1)P(E_2)=\frac{90}{200}\frac{150}{200}=\frac{27}{80}\neq\frac{7}{17}=P(E_1|E_2)$$

Gli eventi non sono indipendenti.

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova d'esame (04/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

$\boxed{\textbf{Tema B}}$

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$ (04/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. __________ Corso __________

IN STAMPATELLO VR ······ A-E / F-O / P-Z

Tema B

**** Svolgere prima i punti* (a) *di* *tutti* *gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). *****

▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

(1) (a) Dati i vettori $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (0, 3, -2)$, e il punto $P(-2, 3, 1)$ determinare in forma parametrica e cartesiana r passante per P e parallela a $\vec{v}$ e il piano Π passante per P e ortogonale a $\vec{u}$. Calcolare poi l'area del parallelogramma compreso tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Detta Γ la parabola $y = -x^2 - x$ del piano orizzontale, trovare il punto di Γ più vicino a Π.

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{|x| - 1}{e^x - 2}$, e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_0^3 \left(4x \log(x+1) - \sqrt{x+1}\right)\, dx$.

(b) Disegnare $S = \{(x, y) : -1 \le x \le 1 - |y|,\ y \le e^x\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x}{y - x}$, determinarne dominio, zeri, segno, curve di livello e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali.

(b) Disegnare $\mathcal{T} = \{(x, y) : y \le x - 2 \le 0, y + 2 \ge 0\}$, e determinare gli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$. Si può cercare di dare un'interpretazione geometrica dei risultati?

(5) (a) Studiare a priori la crescenza delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $(x^2 - 4)y' = 4y$, e determinarne (possibilmente in due modi) la soluzione tale che $y(0) = 3$ e la soluzione tale che $y(3) = 0$.

(b) Determinare, prima per $\alpha = -1$ e poi eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'unica soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = x + 2e^{\alpha x}$ tale che $y(0) = -2$ e $y'(0) = 0$.

[1] Non è richiesto lo studio della convessità.

Matematica e Statistica (A-E)

Prova di STATISTICA (A-E) - Gobbi (04/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ________________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

Tema B

**** Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare ****

▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

ESERCIZIO 1

Data la seguente distribuzione di frequenze presentata in tabella:

X	f
1	30
5	40
15	57
20	23

Calcolare:
a) media aritmetica, media armonica e media geometrica;
b) mediana e moda;
c) la varianza con un metodo a scelta.

ESERCIZIO 2

Sui dati presentati in tabella effettuare un test di omogeneità fra la distribuzione di frequenze osservate f e la distribuzione teorica F ad un livello di significatività del 5%.

X	f	F
2	40	36
4	50	52
6	25	26
8	35	36

ESERCIZIO 3

Una ricerca sulla relazione fra quantità assunta di un integratore a base di vitamina C e il livello di radicali liberi sulle pareti cellulari vascolari ha dato i seguenti risultati:

Quantità di vitamina C	Livello radicali liberi
0	58
2	27
5	10
9	5

Sui dati presentati in tabella:
(a) interpolare le due distribuzioni con una retta Y'=a+bX;
(b) calcolare il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;
(c) giudicare la bontà di accostamento.

Allegato: valori della variabile "Chi Quadrato" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	alpha %							
	99,5	99	97,5	95	5	2,5	1	0,5
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	11,07	12,83	15,09	16,75

Matematica e Statistica (F-O, P-Z)

Prova di STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma (04/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. ____________

IN STAMPATELLO VR ······

Tema B

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** ▸▸▸▸ **Test a quiz sul retro** ▸▸▸▸

Esercizio 1)
Nella tabella seguente viene riportata la valutazione del livello di gradimento del corso di statistica dell A.A. 2007/2008 per una facoltà di Economia.

Gradimento	Ottimo	Buono	Discreto	Sufficiente	Insufficiente	Gravemente Insufficiente
Frequenza	3	2	1	4	5	2

Determinare
a) La tipologia del carattere.
b) Tutti gli indici sintetici di posizione possibili da calcolare.
c) Se possibile, un indice sintetico di variabilità.
d) Una rappresentazione grafica adeguata.

Esercizio 2)
Da un'indagine si sono rilevate in 6 piccole aziende italiane (indicate con lettere A-F) il profitto ed il valore delle spese sostenute per ammodernare gli impianti espressi in migliaia di euro. I dati ottenuti sono rappresentati nella forma Azienda(Profitto; Spesa).

A(50; 20) B(60; 40) C(30; 14) D(85;50) E(95;60) F(40;26)

Il candidato,
a) Indichi e fornisca una rappresentazione grafica adeguata alla serie ottenuta.
b) Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità
c) Ipotizzando un legame di tipo lineare,
   1. Calcoli l'opportuna regressione
   2. Ipotizzi quale sarebbe l'investimento previsto nel caso si riscontrasse un profitto di 100 mila euro
   3. Il legame ipotizzato è attendibile? Motivare numericamente la risposta.

Esercizio 3)
Si vuole verficare la bontà di una roulette classica composta da 36 numeri (18 neri e 18 rossi), e due numeri detti "verdi" (zero e doppio zero). In particolare, si è interessati a verificare che la probabilità che vinca il banco (esca zero o doppio zero) sia equa.
Il candiato:
a) determini il numero di osservazioni necessarie affinchè si possa procedere a tale verifica
b) supposto di aver eseguito 380 prove, indicare se la roulette è equa a fronte delle seguenti frequenze assolute

Esito	Rosso	Nero	"0"	"00"
Frequenza	176	188	10	6

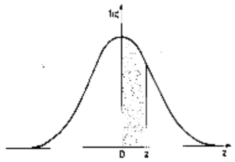
Esercizio 4)
Si considerino i seguenti eventi legati all'estrazione di una delle 6 aziende descritte nell'Esercizio 2.

E_1: si estragga un'azienda che spende oltre 45 mila euro
E_2: si estragga un'azienda che ricava oltre 45 mila euro

a) Il candiato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
b) Il candidato indichi se gli eventi E_1 ed E_2 possono ritenersi statisticamente indipendenti.

Tavola I

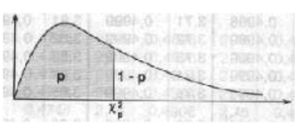
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

$\boxed{\text{Tema B}}$ - Soluzioni

MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)

(1) (a) La retta r passante per $P(-2,3,1)$ e parallela a $\vec{v} = (0,3,-2)$ ha forma parametrica $r = \{(x,y,z) = (-2,3,1) + t(0,3,-2) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) = (-2,3+3t,1-2t) : s,t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo $t = -\frac{1}{2}(z-1)$ in $(x,y) = (-2,3+3t)$ si ottiene la forma cartesiana data dal sistema tra $x = -2$ e $2y + 3z - 9 = 0$. D'altra parte, il piano Π passante per $P(-2,3,1)$ e ortogonale a $\vec{u} = (1,2,-1)$ ha equazione cartesiana del tipo $x + 2y - z + k = 0$, e il passaggio per P dà $k = -3$: dunque $x + 2y - z - 3 = 0$. Due vettori ortogonali a $\vec{u}$ (dunque paralleli a Π) e non paralleli tra loro sono ad esempio $\vec{v}_1 = (2,-1,0)$ e $\vec{v}_2 = (1,0,1)$, da cui la forma parametrica $\Pi = \{(x,y,z) = (-2,3,1) + s(2,-1,0) + t(1,0,1) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) = (-2+2s+t, 3-s, 1+t) : s,t \in \mathbb{R}\}$. Infine, il prodotto vettoriale tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$ risulta $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-1,2,3)$, dunque l'area del parallelogramma compreso tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{14}$.

(b) La distanza di un punto generico $P(x) = (x, -x-x^2, 0)$ della parabola Γ dal piano Π è $d(x) = \frac{|x+2(-x-x^2)-0-3|}{\sqrt{6}} = \frac{|-2x^2-x-3|}{\sqrt{6}} = \frac{2x^2+x+3}{\sqrt{6}}$. Derivando si ottiene $d'(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{6}}$, dunque $d'(x) \geq 0$ quando $x = -\frac{1}{4}$: ne otteniamo che il punto di Γ più vicino a Π è $P(-\frac{1}{4}) = (-\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, 0)$, la cui distanza è $d(-\frac{1}{4}) = \frac{23}{8\sqrt{6}} \sim 1{,}2$.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{|x|-1}{e^x-2}$ è definita per $x \neq \log 2 \sim 0{,}7$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio tranne che in $x = 0$ dove è continua (con $f(0) = 1$) ma è previsto un punto angoloso a causa del modulo; non ha parità ne' periodicità. Si ha $f(x) = 0$ quando $x = \mp 1$; quanto al segno, il denominatore è > 0 per $x > \log 2$ e il numeratore per $x < -1$ oppure $x > 1$, dunque vale $f(x) > 0$ per $-1 < x < \log 2$ e per $x > 1$. I limiti interessanti valgono $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \log 2^{\mp}} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{e^x-2} = 0^+$ (l'unico limite in forma indeterminata era quest'ultimo, e per calcolarlo basta ricordare che $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ o applicare de l'Hôpital). Pertanto $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$; a $-\infty$ si ha invece $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x-1}{x(e^x-2)} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - \frac{1}{2}x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x-1-\frac{1}{2}xe^x+x}{e^x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1-\frac{1}{2}xe^x}{e^x-2} = \frac{1}{2}$ (si noti che $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$), dunque $y = \frac{1}{2}(x+1)$ è asintoto a $-\infty$. Derivando per $x \neq 0$ e posto $\sigma := \operatorname{sign} x$, si ottiene $f'(x) = \frac{\sigma(e^x-2)-e^x(|x|-1)}{(e^x-2)^2}$. Per $x < 0$ si ha $f'(x) = \frac{(-1)(e^x-2)-e^x(-x-1)}{(e^x-2)^2} = \frac{xe^x+2}{(e^x-2)^2}$: si ha $xe^x + 2 > 0$ se e solo se $x < -2e^{-x}$, che un confronto grafico mostra essere sempre vero, pertanto $f'(x) > 0$ (ovvero f cresce strettamente) per $x < 0$. Per $x > 0$ si ha invece $f'(x) = \frac{(e^x-2)-e^x(x-1)}{(e^x-2)^2} = -\frac{(x-2)e^x+2}{(e^x-2)^2}$: vale dunque $f'(x) \geq 0$ se e solo se $(x-2) \leq -2e^{-x}$, e un altro confronto grafico mostra che esiste un punto $x_0 \in]1,2[$ (vale in realtà $x_0 \sim 1{,}6$) tale che che ciò accade per $x < x_0$. Pertanto f cresce in $]0, \log 2[$ e $]\log 2, x_0]$ e decresce dopo: ammette dunque un massimo relativo in x_0. Notiamo anche che i limiti $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 2$ e $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ esistono finiti ma diversi tra loro, dunque in 0 c'è il previsto punto angoloso.

(3) (a) Vale $\int (4x\log(x+1) - \sqrt{x+1})\,dx = \int 4x\log(x+1)\,dx - \int \sqrt{x+1}\,dx = 2x^2\log(x+1) - \int 2x^2 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} = 2x^2\log(x+1) - 2\int(x - 1 + \frac{1}{x+1})\,dx - \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} = 2x^2\log(x+1) - (x^2 - 2x + 2\log(x+1)) - \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} + k$, dunque $\int_0^3 (4x\log(x+1) - \sqrt{x+1})\,dx = (2x^2\log(x+1) - x^2 + 2x - 2\log(x+1) - \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}]_0^3 = (18\log 4 - 9 + 6 - 2\log 4 - \frac{16}{3}) - (-\frac{2}{3}) = 32\log 2 - \frac{23}{3} \sim 14{,}4$.

(b) (Figura 2) La zona di piano $S = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1 - |y|,\ y \leq e^x\}$ ha area $\int_{-1}^0 e^x\,dx + \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^{-1}(x-1)\,dx = (e^x]_{-1}^0 + (x - \frac{1}{2}x^2]_0^1 + (\frac{1}{2}x^2 - x]_1^{-1} = (1) - (e^{-1}) + (\frac{1}{2}) - (0) + (\frac{3}{2}) - (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{e} \sim 3{,}1$.

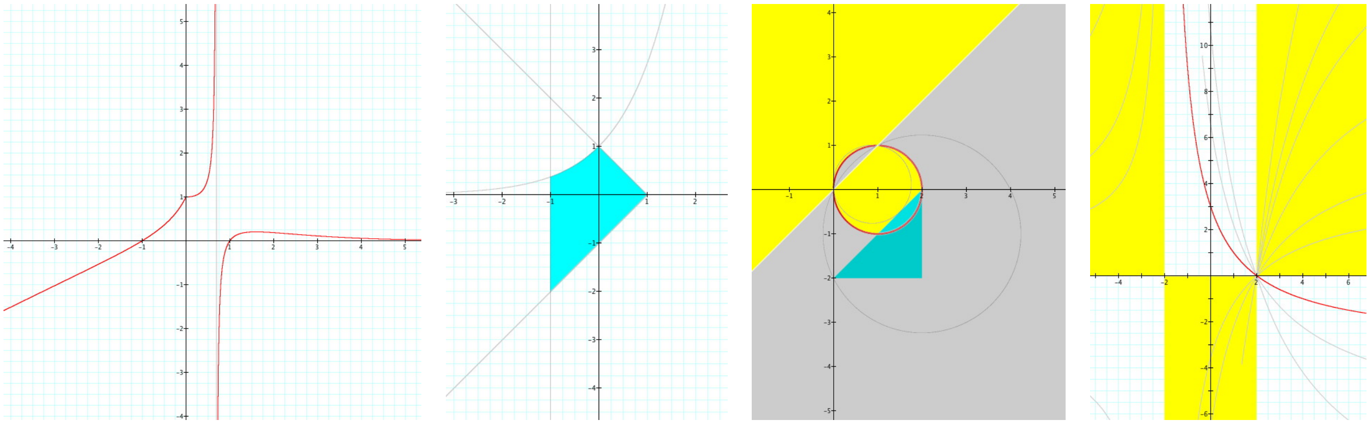
(4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x}{y-x}$ è dato da $y - x \neq 0$ (vanno tolti i punti della retta bisettrice $y = x$); si tratta di una funzione differenziabile, in quanto le derivate parziali (vedi sotto) risultano continue. La funzione si annulla quando $x^2 + y^2 - 2x = 0$, ovvero sui punti della circonferenza di centro $C(1,0)$ e raggio 1; vanno però esclusi i punti $O(0,0)$ e $A(1,1)$, che sono le intersezioni della circonferenza con la retta $y = x$ e dunque non stanno nel dominio. Il numeratore è > 0 fuori della circonferenza e < 0 dentro; il denominatore è > 0 sopra la bisettrice e < 0 sotto; il segno di g ne segue per quoziente. Le curve di livello $g(x,y) = k$ sono date da $x^2 + y^2 - 2x = k(y-x)$, ovvero $x^2 + y^2 - (2-k)x - ky = 0$: si tratta dunque di circonferenze tutte passanti per l'origine e di centro variabile $C_k(1 - \frac{k}{2}, \frac{k}{2})$ (naturalmente vale $C_0 = C$): da $(x,y) = (1 - \frac{k}{2}, \frac{k}{2})$ si ricava $y = 1 - x$, dunque è su tale retta che si muovono i centri C_k al variare di $k \in \mathbb{R}$. I limiti interessanti sono nei vari punti della

retta bisettrice $y = x$ e in ∞_2. In un qualsiasi punto della bisettrice diverso da O e da A il limite vale chiaramente $\mp\infty$ a seconda del lato del dominio da cui si tende al punto stesso. Invece in 0 e in A il limite non esiste: per vederlo notiamo che tendendo a tali punti lungo la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ il limite sarebbe 0, mentre tendendo a O lungo l'asse x (o tendendo a A lungo la retta $x = 1$) il limite sarebbe 2. Un po' più delicata è la questione del limite in ∞_2: preso un qualsiasi $k > 0$ la disequazione $|g(x, y)| > k$ è soddisfatta al di fuori delle circonferenze $g(x, y) = \mp k$, dunque più si va lontani dall'origine e più la funzione ha valore assoluto alto, e ciò indica che il limite vale $\mp\infty$, a seconda che si tenda a ∞_2 da sotto o da sopra la bisettrice $y = x$.
Le derivate parziali sono $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{(2x-2)(y-x)+(x^2+y^2-2x)}{(y-x)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2y(y-x)-(x^2+y^2-2x)}{(y-x)^2}$; dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ricava $x^2 + y^2 - 2x = 2y(y - x) = -2(x - 1)(y - x)$, da cui necessariamente $2y(y - x) = -(2x - 2)(y - x)$ ovvero $(y + x - 1)(y - x) = 0$, che dà $y = x$ oppure $y = 1 - x$; nel primo caso, da $x^2 + y^2 - 2x = 2y(y - x)$ si ottengono le soluzioni $O(0, 0)$ e $A(1, 1)$ che però non sono accettabili in quanto fuori dal dominio, mentre nel secondo non si ottengono soluzioni. Pertanto la funzione è priva di punti stazionari e dunque, essendo differenziabile, non ha alcun estremo locale.

(b) (Figura 3) Per la ricerca degli estremi assoluti di g sul triangolo $\mathcal{T} = \{(x, y) : y \le x - 2 \le 0\,, y + 2 \ge 0\}$ (che esistono in base a Weierstrass) dividiamo $\mathcal{T}$ nelle zone $\mathcal{T}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{T}_1 = \{(2, y) : -2 < y < 0\}$, $\mathcal{T}_2 = \{(x, -2) : 0 < x < 2\}$ e $\mathcal{T}_3 = \{(x, x - 2) : 0 < x < 2\}$ dei suoi lati privati dei vertici; e $\mathcal{T}_4 = \{D(0, -2), E(2, -2), F(2, 0)\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g ma, come visto, non ce ne sono. • Sul lato $\mathcal{T}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x) := g(2, y) = \frac{y^2}{y-2}$ con $-2 < y < 0$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(y) = \frac{y(y-4)}{(y-2)^2}$, ma ciò avviene per $y = 0$ e $y = 4$, che non sono accettabili. • Sul lato $\mathcal{T}_2$ la funzione vale $\varphi_2(x) := g(x, -2) = -\frac{x^2-2x+4}{x+2}$ con $0 < x < 2$. La derivata $\varphi_2'(x) = \frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$ si annulla per $x = 2(\mp\sqrt{3} - 1)$, delle quali solo $2(\sqrt{3} - 1) \sim 1{,}4$ è accettabile. Si trova dunque un nuovo punto $G(2(\sqrt{3} - 1), -2)$. • Sul lato $\mathcal{T}_3$ la funzione vale $\varphi_3(x) := g(x, x - 2) = -(x^2 - 3x + 2)$ con $0 < x < 2$. La derivata $\varphi_3'(x) = -(2x - 3)$ si annulla per $x = \frac{3}{2}$, e si trova dunque un ulteriore nuovo punto $H(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. • Infine, i tre punti D, E, F di $\mathcal{T}_4$ vanno tutti tenuti presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei cinque punti D, E, F, G, H: poiché $f(D) = -2$, $f(E) = -1$, $f(F) = 0$, $f(G) = 6 - 4\sqrt{3} \sim -0{,}8$ e $f(H) = \frac{1}{4}$, il massimo assoluto di g su $\mathcal{T}$ è $\frac{1}{4}$ (assunto in H) e il minimo assoluto è -2 (assunto in D). L'interpretazione grafica richiesta è legata alla conoscenza delle curve di livello fatta in precedenza: si noti (vedi Figura 3) che H e D sono proprio i punti di $\mathcal{T}$ che giacciono sulle curve di livello di g di valore rispettivamente più basso e più alto possibile.

(5) (a) (Figura 4) Da $(x^2 - 4)y' = 4y$ si ricava che eventuali soluzioni $y(x)$ definite in $x = \mp 2$ devono necessariamente annullarsi in tali punti. Al di fuori di quei due punti si ha $y' = \frac{4y}{x^2-4}$, dunque le soluzioni sono crescenti dove la funzione al secondo membro è positiva (vedi figura). • Iniziamo risolvendo l'equazione come a variabili separabili. La soluzione tale che $y(3) = 0$ è quella nulla $y \equiv 0$. Invece per la soluzione con $y(0) = 3$, separando le variabili e integrando si ottiene $\int \frac{1}{y}\,dy = \int (\frac{4}{x^2-4})\,dx = \int (\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2})\,dx$ da cui $\log|y| = \log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + k$, ovvero $y = h\frac{x-2}{x+2}$ con $h \in \mathbb{R}$ (essendo il dato iniziale riferito a $x = 0$, si intende che $-2 < x < 2$): imponendo infine che $y(0) = 3$ si ottiene $h = -3$, da cui $y(x) = -3\frac{x-2}{x+2}$. • Interpretando invece l'equazione come lineare, portata nella forma $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = -\frac{4}{x^2-4}$ e $q(x) = 0$, essendo $P(x) = \int p(x)\,dx = \log\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$, si ottiene $y = h\frac{x-2}{x+2}$ con $h \in \mathbb{R}$; imponendo poi che $y(0) = 3$ oppure che $y(3) = 0$ si ottiene rispettivamente $h = -3$ oppure $h = 0$.

(b) L'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = x + 2e^{\alpha x}$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 + 2t + 1 = 0$ ha soluzione doppia $t = -1$, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo $y(x) = (A + Bx)e^{-x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • Posto $\alpha = -1$, il secondo membro diventa $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ con $b_1(x) = x$ e $b_2(x) = 2e^{-x}$. Una soluzione particolare per $b_1(x)$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ux + v$ per certi $u, v \in \mathbb{R}$: essendo $\tilde{y}_1'(x) = u$ e $\tilde{y}_1''(x) = 0$ si ricava $\tilde{y}_1'' + 2\tilde{y}_1' + \tilde{y}_1 = ux + (2u + v) = x$ da cui $u = 1$ e $v = -2u = -2$, pertanto $\tilde{y}_1(x) = x - 2$. Una soluzione particolare per $b_2(x)$ sarà invece del tipo $\tilde{y}_2(x) = ux^2e^{-x}$ per un certo $u \in \mathbb{R}$: essendo $\tilde{y}_2'(x) = u(2x - x^2)e^{-x}$ e $\tilde{y}_1''(x) = u(2 - 4x + x^2)e^{-x}$ si ricava $\tilde{y}_2'' - 2\tilde{y}_2' + \tilde{y}_2 = 2ue^{-x} = 2e^{-x}$ da cui $u = 1$, pertanto $\tilde{y}_2(x) = x^2e^{-x}$. Le soluzioni dell'equazione completa saranno pertanto $y(x) = (A + Bx)e^{-x} + x^2e^{-x} + x - 2$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$; imponendo infine che $y(0) = -2$ e $y'(0) = 0$ si ottiene $A = 0$ e $B = -1$, ovvero $y(x) = (x^2 - x)e^x + x - 2$. • Nel caso in cui invece $\alpha \ne -1$, cambia solo la soluzione particolare di $y'' - 2y' + y = 2e^{\alpha x}$ che sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = ue^{\alpha x}$ per un certo $u \in \mathbb{R}$: essendo $\tilde{y}_2'(x) = u\alpha e^{\alpha x}$ e $\tilde{y}_2''(x) = u\alpha^2e^{\alpha x}$ si ricava $\tilde{y}_2'' + 2\tilde{y}_2' + \tilde{y}_2 = u(\alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{\alpha x} = 2e^{\alpha x}$ da cui $u = \frac{2}{\alpha^2+2\alpha+1}$, pertanto $\tilde{y}_2(x) = \frac{2}{(\alpha+1)^2}e^{\alpha x}$. Le soluzioni dell'equazione completa saranno pertanto $y(x) = (A + Bx)e^{-x} + \frac{2}{(\alpha+1)^2}e^{\alpha x} + x - 2$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$; e imponendo che $y(0) = -2$ e $y'(0) = 0$ si ottiene $A = -\frac{2}{(\alpha+1)^2}$ e $B = -\frac{\alpha+3}{\alpha+1}$.



1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g; il triangolo $\mathcal{T}$ (azzurro), e le curve di livello (grigie) che toccano $\mathcal{T}$ col valore più alto e più basso possibili per g. **4.** Ex. (5.a): zone di crescenza (giallo), alcune soluzioni (grigio), la soluzione tale che $y(0) = 3$ (rosso).

STATISTICA (A-E) - Gobbi

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) la varianza con un metodo a scelta.

X	f	X*f	f/X	ln(X)	ln(X)*f	X2	X2*f
1	30	30	30,00	0,0000	0,0000	1	30
5	40	200	8,00	1,6094	64,3775	25	1000
15	57	855	3,8000	2,7081	154,359	225	12825
20	23	460	1,1500	2,9957	68,9018	400	9200
	150	**1545**	**42,9500**	**7,3132**	**287,6382**		**23055**

a) Calcolo della media aritmetica, armonica e geometrica:

$$\mathbf{M(X)} = \frac{\Sigma X * f}{\Sigma f} = \frac{1545}{150} = \mathbf{10{,}3}$$

$$\mathbf{Ma(X)} = \frac{\Sigma f}{\Sigma f/X} = \frac{150}{42{,}9500} = \mathbf{3{,}492}$$

$$\ln(Mg(X)) = \frac{\Sigma \ln(X) * f}{\Sigma f} = \frac{287{,}6382}{150} = \mathbf{1{,}9176} \qquad \mathbf{Mg(X)} = e^{1{,}9176} = \mathbf{6{,}8045}$$

b) Calcolo della mediana e della moda:

X75° =< mediana =< X76° : me = 15

moda = **15**

c) Calcolo della varianza (usando ad esempio il secondo metodo):

$V(X) = \quad M(X^2) - m(X)^2 = \quad 23055/150 - 10{,}3\text{^}2 = \quad \mathbf{47{,}61}$

ESERCIZIO 2

Sui dati presentati in tabella effettuare un test di omogeneità fra la distribuzione di frequenze osservate f e la distribuzione teorica F ad un livello di significatività del 5%.

X	f	F	$(f-F)^2/F$
2	40	36	0,4444
4	50	52	0,0769
6	25	26	0,0385
8	35	36	0,0278
	150	**150**	**0,5876**

Calcolo del Chi Quadrato:

ChiQc = **0,5876**

Si individua sulle tavole del Chi Quadrato il valore teorico da confrontare:

ni=n-1=4-1= **3** gdl alpha = 5%

ChiQt = **7,81**

Poiché ChiQc < ChiQt si accetta l'ipotesi di omogeneità fra le due distribuzioni.

ESERCIZIO 3

Una ricerca sulla relazione fra quantità assunta di un integratore a base di vitamina C e il livello di radicali liberi sulle pareti cellulari vascolari ha dato i seguenti risultati:

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
0	58	0	0	3364
2	27	54	4	729
5	10	50	25	100
9	5	45	81	25
16	**100**	**149**	**110**	**4218**

Sui dati presentati in tabella:
a) interpolare le due distribuzioni con una retta;
b) calcolare il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;
c) giudicare la bontà di accostamento.

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$b = \dfrac{Cov(X;Y)}{V(X)}$ $\qquad a = M(Y) - bM(X)$

$M(X) = \dfrac{16}{4} = \mathbf{4}$

$M(Y) = \dfrac{100}{4} = \mathbf{25}$

$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \dfrac{149}{4} - 4 * 25 = \mathbf{-62{,}75}$

$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \dfrac{110}{4} - 4\text{^}2 = \mathbf{11{,}5}$

b = $\dfrac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \dfrac{-62{,}75}{11{,}5} = \mathbf{-5{,}4565}$

a = $M(Y) - bM(X) = 25 - 3{,}1036*4 = \mathbf{46{,}8261}$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$r = \dfrac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\ \sigma(Y)}$

$V(Y) = \dfrac{4218}{4} - 25\text{^}2 = \mathbf{429{,}5}$

$\sigma(Y) =$ RADQ(429,5) = **20,7244**

$\sigma(X) =$ RADQ(11,5) = **3,3912**

r = $\dfrac{-62{,}75}{20{,}7244 * 3{,}3912} = \mathbf{-0{,}8929}$ **Si registra una forte relazione lineare indiretta**

c) Giudicare la bontà di accostamento:

Per giudicare la bontà di accostamento del modello teorico, calcolo il coefficiente di determinazione:

$\mathbf{r^2 =}$ (-0,8929)^2= **0,7972**

Il modello teorico spiega in maniera buona la variabilità delle frequenze osservate.

STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma

Esercizio 1)

a) Determinare la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto non espresso da numeri) ordinabili (in quanto e possibile fissare un ordine fra le modalità)

b) Tutti gli indici sintetici di posizione possibili da calcolare.

Un carattere di tipo qualitativo ordinabile ammette due indici sintetici di posizione: la moda e la mediana.

La moda è che la modalità con la frequenza maggiore: pertanto la moda è "Insufficiente"

Per calcolare la mediana si deve valutare la numerosità della popolazione (N=17) facilmente ottenubile comulando le frequenze assolute

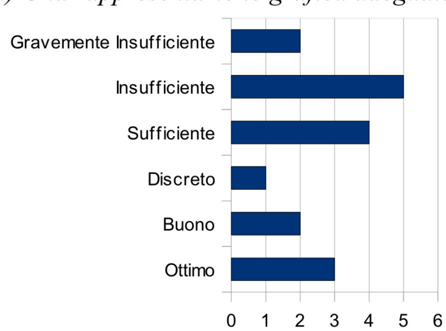
Gradimento	Ottimo	Buono	Discreto	Sufficiente	Insufficiente	Gravemente Insufficiente
Frequenza	3	2	1	4	5	2
Cumulata	3	5	6	10	15	17

Dopo di che, la mediana è il valore che bipartisce la popolazione, ovvero, una volta ordinate le osservazioni si ricerca quella che lascia alla sua destra (N-1)/2 = 8 elementi; Ovvero il nono elemento. Analizzando le frequenze cumulate si ottiene che la mediana indicherà la modalità "Sufficiente" (che infatti raccoglie le osservazioni dal 7° al 10 ° posto).

c) Tutti gli indici sintetici di posizione possibili da calcolare.

Un carattere di tipo qualitativo non ammette alcun indici sintetici di variabilità.

d) Una rappresentazione grafica adeguata.



Un carattere di tipo qualitativo ordinabile le cui le modalità abbiano frequenze superiori all'unità viene solitamente rappresentato mediante un diagramma a barre.

Questo diagramma è composto da barre orizzontali (o verticali) inserite in un piano cartesiano. Il grafico riposta una barra per ogni modalità, la cui base (o altezza) viene fissata e centrata nel valore della modalità corrispondente mentre la sua altezza (o base) raggiunge la relativa frequenza assoluta.

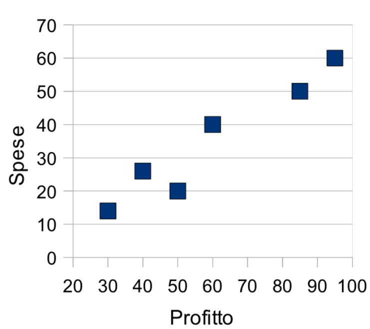
A lato si riporta il digramma a barre ricavato dalla distribuzione in esame

Esercizio 2)

a) Indicare e fornire una rappresentazione grafica adeguata.

Per serie bivariate continue o discrete cui le frequenze non siano particolarmente alte si usa rappresentare la serie mediante diagrammi a dispersione. Questi diagrammi sono diagrammi cartesiani i cui le modalità dei caratteri vengono posti sui due essa ed ogni osservazione viene rappresentata da un punto.

A lato si mostra il diagramma a dispersione ottenuto dai dati forniti.



b) Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità

Per serie bivariate continue o discrete l'indice di variabilità migliore è dato dalla matrice varianza/covarianza. Questa matrice si compone di 3 distinti valori le due varianze dei distinti caratteri e la covarianza, della serie bivariata.

Si seguito riportiamo i calcoli per le due varianze per i singoli caratteri:

X: Profitto realizzato dall'aziende

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{50+60+30+85+95+40}{6}=60$$

$$\sigma_x^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\bar{x}^2=\frac{2500+3600+900+7225+9025+1600}{6}-3600=\frac{24850-21600}{6}=\frac{3250}{6}$$

Y: Spesa per ammodernamento effettuata dall'aziende

$$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i=\frac{20+40+14+50+60+26}{6}=35$$

$$\sigma_x^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i^2-\bar{y}^2=\frac{400+1600+196+2500+3600+676}{6}-1225=\frac{8972-7350}{6}=\frac{1622}{6}$$

La covarianza si ottiene

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

I cui conti sono ripostati in tabella

	X	Y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
	50	**20**	-10	-15	150
	60	**40**	0	5	0
	30	**14**	-30	-21	630
	85	**50**	25	15	375
	95	**60**	35	25	875
	40	**26**	-20	-9	180
somma	**360**	**210**			**2210**

Per tanto la matrice varianza covarianza risulta essere

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\frac{3250}{6} & \frac{2210}{6}\\ \frac{2210}{6} & \frac{1622}{6}\end{bmatrix}$$

c 1) Ipotizzando un legame di tipo lineare, si calcoli l'opportuna regressione

La retta di regressione ha equazione

$$\hat{y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x+\bar{y}-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{y} \qquad \hat{y}=\frac{2210}{3250}x+35-\frac{2210}{3250}60 \qquad \hat{y}=0.68x-5.8$$

c 2) Ipotizzando un legame di tipo lineare, si ipotizzi quale sarebbe l'investimento previsto nel caso si riscontrasse un profitto di 100 mila euro

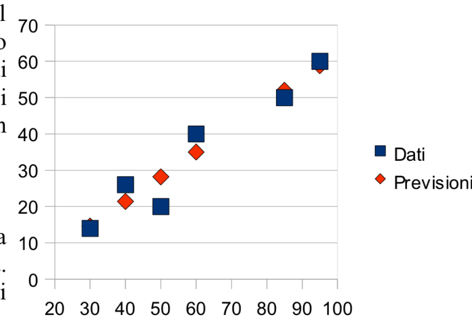
La risposta a questo quesito si ottiene applicando la retta nel punto x= 100. si ottiene quindi un investimento previsto di 62.2 mila euro.

c 3) Ipotizzando un legame di tipo lineare, si verifichi il legame ipotizzato è attendibile? Motivare numericamente la risposta

Un buon indicatore della bontà del modello di regressione è dato dall'indice di correlazione di Pearson

$$R^2=\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}=0.9265 \qquad R=0.9625$$

Poiche l'indice risulta superiore a 0.7 si può asserire che il legame è buono. Ovviamente il dato deve essere confermato dalla visualizzazione del modello. Infatti il coefficientei di Pearson puù anche dare risultati molto errati. A lato si riportano le presevisioni effettuate dal modello lineare che ben descrivono l'andamento dei dati



Esercizio 3)
L'indagine statistica mira a verificare mediante inferenza se la probabilità di ottenere uno zero od un doppio zero e onesta. L'analisi ri riduce tutta a verficare le probabilità di due eventi complementari

A: esca un numero "verde"   A: non esca un numero "verde"

Si ha inoltre che P(A) = 2/38 = 1/19 e P(A) = 1- P(A) = 18/19
Pertanto è possibile modellare la popolazione di riferimento mediante una bernoulliana *P~Ber(1/19)* dove *E*[*P*]=1/19.

a) determinare il numero di osservazioni necessarie affinchè si possa procedere a tale verifica
la dimensione nel campione varia a seconda del tipo di test da effettuare: se si utilizza il test di adattamento alla distribuzione empirica o quello sul valore atteso.
Nell'ipotesi di agire usando il test sul valore atteso si ha che la dimensione del campione deve essere superiore alle 30 unità statistiche.

b) supposto di aver eseguito 380 prove, indicare se la roulette è equa a fronte delle seguenti frequenze assolute
Il test impostato è un test di ipotesi sul parametro valore atteso. Si hanno le seguenti ipotesi

$$H_0: E[P]=1/19 \qquad H_1: E[P]\neq 1/19$$

Questo test utilizza come stimatore la media campionaria e, poiche la dimensione del campione è superiore alle 30 unità, si ha la convergenza della sua distribuzione ad una normale, si ha infatti che

$$\bar{x}\sim N\left(p,\frac{p(1-p)}{n}\right)\Rightarrow \bar{x}\sim N\left(\frac{1}{18,}\frac{9}{19*19*190}\right)$$

Verificata la convergenza dello stimatore è possibile determinare la regione di accettazione *A*. Essendo l'ipoesi alternativa un ipotesi di disuguaglianza il test da eseguire è di tipo bilaterale. Fissato un livello di significatività del 5 % si ha che

$$A=\left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}};z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\Rightarrow A=[-1.96;1.96]$$

Si calcola ora il valore dello simatore standardizzato

$$\bar{x}=\frac{10+6}{380}\Rightarrow z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-E[P]}{\sqrt{Var[P]}}=\frac{\frac{16}{380}-\frac{1}{19}}{\frac{3}{19*\sqrt{180}}}=-0.894$$

Poichè il valore ottenuto è interno alla regione di accettazione possiamo accettare l'ipotesi nulla.

Esercizio 4)

a) Il candiato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1|E_2)$.
Essendo gli eventi elementari equiprobabili, le probabilità degli eventi E_1 ed E_2 e dell'evento intersezione (estrarre un'azienda che spenda e ricavi oltre 45 mila euro) possono essere ricavate utilizzando la definizione classica; secondo la quale la probabilità è il rapporto dei casi favorevoli sui casi totali. Pertanto si ha che:

$$P(E_2)=\frac{4}{6}=0.667 \qquad P(E_1)=\frac{3}{6}=0.5 \qquad P(E_1\cap E_2)=\frac{2}{6}=0.333$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{4+3-2}{6} = 0.833 \qquad P(E_1 | E_2) = P\frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{2/6}{3/6} = 0.667$$

b) Il candiato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti.

Se due eventi sono indipendenti si ha che la probabilità condizionata è data dal prodotto delle probabilità, pertanto essendo

$$P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = 0.5 \neq 0.667 = P(E_1 | E_2)$$

Gli eventi non sono indipendenti.