Esercizi del 18 ottobre 2010

Silvia Saoncella

Esercizio 1.
Rappresentare graficamente il dominio D della seguente funzione:

$$f(x,y) = arcsin(xy - y - 2x)$$

Svolgimento. Il dominio D di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ è costituito dall'insieme di tutte le coppie (x,y) tali per cui l'espressione $f(x,y)$ abbia senso. La funzione arcoseno è definita quando l'argomento è compreso tra -1 e 1. Dobbiamo quindi imporre che $-1 \leq xy - y - 2x \leq 1$, otteniamo che il dominio è il seguente insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq xy - y - 2x \leq 1\right\}$$

Andando ad isolare la variabile y otteniamo la seguente espressione

$$-1 + 2x \leq (x-1)y \leq 1 + 2x$$

Se $x < 1$ ricaviamo che

$$\frac{2x-1}{x-1} \geq y \geq \frac{1+2x}{x-1} \tag{1}$$

che sono le equazioni di due iperboli entrambe con asintoti $x = 1$ e $y = 2$. Andando a rappresentare quest'ultime nel piano troviamo che (1) indica i punti del piano compresi tra le due iperboli. Analogamente, se $x > 1$ si ottiene che

$$\frac{2x-1}{x-1} \leq y \leq \frac{1+2x}{x-1}$$

ed anche qui troviamo i punti compresi tra le due iperboli aventi asintoti $x = 1$ e $y = 2$. In conclusione il campo di esistenza è rappresentato dall'unione delle zone rappresentare dai due casi. Si tratta di un dominio non compatto in quanto non è limitato.

Esercizio 2.
Rappresentare graficamente il dominio D della seguente funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{(x^2-2x-y)(x^2-2x+y)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2}} + \log\frac{x+1}{2-x}$$

Svolgimento. Dobbiamo imporre che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo, che l'argomento della radice sia maggiore o uguale a zero, che i denominatori siano diversi da zero. Otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2-x} > 0 \\ (x^2-2x-y)(x^2-2x+y) \geq 0 \\ x \neq 2 \\ (x,y) \neq (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Consideriamo la prima espressione

$$\frac{x+1}{2-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2$$

mentre la seconda condizione può essere soddisfatta sia quando entrambi i fattori sono ≥ 0, sia quando sono entrambi ≤ 0. Si nota facilmente che i due fattori sono le equazioni di due parabole passanti per i punti di ascissa $x = 0$ e $x = 2$. Consideriamo il primo fattore $(x^2 - 2x - y)$, notiamo che in $(0, 1)$ l'espressione assume valore negativo. Abbiamo quindi che per punti interni alla parabola $y = x^2 - 2x$ il fattore assume valori negativi, mentre per quelli esterni valori positivi. La stessa cosa si ottiene per il fattore (x^2-2x+y), quindi in conclusione si devono andare a prendere le regioni del piano in cui le parabole assumono entrambe o valori positivi o valori negativi. La terza e la quarta condizione ci dicono rispettivamente che bisogna escludere i punti $(2, 0)$ e $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. (Il dominio ha forma di pesce).

Esercizio 3.
Rappresentare graficamente il dominio D della seguente funzione:

$$f(x, y) = \log\Big(1 - |\frac{y}{x}|\Big)$$

Svolgimento. In questo caso bisogna imporre che l'argomento del logaritmo sia > 0 e che il denominatore della frazione sia diverso da 0. Si ha che

$$\log\Big(1 - |\frac{y}{x}|\Big) = \begin{cases} \log\big(1 - \frac{y}{x}\big) & \text{se } x > 0,\ y \geq 0 \cup x < 0,\ y \leq 0 \\ \log\big(1 + \frac{y}{x}\big) & \text{se } x > 0,\ y \leq 0 \cup x < 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Consideriamo il primo caso, la funzione $\log\big(1 - \frac{y}{x}\big)$ è definita se $1 - \frac{y}{x} > 0$, cioè se $y < x$. Quindi, nel piano, rappresentiamo la retta $y = x$ ed escludiamo: i punti della retta stessa, i punti che si trovano al di sopra di essa, i punti interni al quarto quadrante e il semiasse negativo delle y. Mentre nel secondo caso troviamo che la funzione $\log\big(1 + \frac{y}{x}\big)$ è definita se $1 + \frac{y}{x} > 0$, cioè se $y > -x$. Quindi, nel piano, rappresentiamo la retta $y = -x$ ed andiamo andare ad escludere i punti della retta stessa, i punti che si trovano al di sotto di essa, i punti interni al primo quadrante ed il semiasse positivo delle y. In conclusione il campo di esistenza è rappresentato dall'unione delle zone rappresentare dai due casi.

Esercizio 4.
Rappresentare graficamente il dominio D della seguente funzione:

$$f(x, y, z) = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$$

Svolgimento. La funzione $f(x, y, z)$ è definita quando $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$ e $z \in [-1, 1]$. Siccome stiamo considerando una funzione a tre variabili, il dominio è costituito da una porzione di spazio. In questo caso si tratta di un cubo avente spigolo di lunghezza pari a 2. In definitiva si ha che il dominio è

$$D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\big\}$$

Esercizio 5.
Rappresentare graficamente il dominio D della seguente funzione:

$$f(x, y, z) = \log(xyz)$$

Svolgimento. La funzione $f(x,y,z)$ è definita quando l'argomento del logaritmo è strettamente maggiore di zero. Dobbiamo imporre la condizione che $xyz > 0$, questo si verifica quando i fattori negativi sono in numero pari. Si ha

$$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, y > 0, z > 0\big\} \cup \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, y < 0, z < 0\big\} \cup \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0, y > 0, z < 0\big\} \cup \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0, y < 0, z > 0\big\}$$

Esercizio 6.
Calcolare il seguente limite se esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1)(y-1)^3}{(x-1)^2 + |y-1|}$$

Svolgimento. Come prima cosa ci riportiamo nell'origine,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1)(y-1)^3}{(x-1)^2 + |y-1|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3(y+1)}{x^2 + |y|}$$

Se proviamo a calcolare il limite lungo le direzioni principali, troviamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

Proviamo a calcolare il limite lungo le rette $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^4(mx+1)}{x^2 + |mx|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^4(mx+1)}{x^2 + |m|} = 0$$

quindi possiamo affermare che, se il limite esiste, vale 0. Dobbiamo ora verificare l'esistenza del limite.
Notiamo che $x^2 + |y| \geq |y| \ \ \forall x$, quindi

$$|\frac{xy^3(y+1)}{x^2 + |y|}| \leq |\frac{xy^3(y+1)}{|y|}| = |xy^2(y+1)| \to 0 \quad \text{per} \quad (x,y) \to (0,0)$$

Possiamo quindi affermare che il limite di f(x,y) esiste e vale 0.
Esercizio 7.
Calcolare il seguente limite se esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2(e^{x-1}-1)}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$

Svolgimento. Come prima cosa ci riportiamo nell'origine,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2(e^{x-1}-1)}{x^2 + y^2 - 2x + 1} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2(e^{x-1}-1)}{y^2 + (x-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2(e^x-1)}{y^2 + x^2}$$

Proviamo a calcolare il limite lungo le rette $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2(e^x-1)}{m^2x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2(e^x-1)}{m^2+1} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{m^2+1} \cdot \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{m^2+1} = 0$$

quindi possiamo affermare che, se il limite esiste, vale 0. Verifichiamo l'esistenza, abbiamo che

$$\frac{y^2(e^x-1)}{y^2+x^2} = \frac{xy^2}{y^2+x^2} \cdot \frac{e^x-1}{x} \sim \frac{xy^2}{y^2+x^2}$$

Considerando la seguente disuguaglianza $|xy| \leq 1/2(x^2 + y^2)$ si ottiene che

$$|\frac{xy^2}{y^2 + x^2}| \leq |\frac{xy}{y^2 + x^2}| \cdot |y| \leq \frac{1}{2}|y| \to 0 \quad \text{per} \quad (x, y) \to (0, 0)$$

(anziché usare la disuguaglianza precedente si sarebbe potuto considerare che $x^2 + y^2 \geq y^2$ per ogni x ed ottenere che $|\frac{xy^2}{y^2+x^2}| \leq |x|$ e la maggiorazione vale perché divido per un denominatore più piccolo). Possiamo quindi concludere che il limite esiste e vale 0. Se invece si fossero considerate le coordinate polari, avremmo ottenuto lo stesso risultato, infatti

$$|\frac{\rho^3 \cos\theta \sin^2\theta}{\rho^2}| = \rho|\cos\theta \sin^2\theta| \leq \rho \to 0 \quad \text{per} \quad \rho \to 0^+$$

essendo $|\cos\theta \sin^2\theta|$ limitata. Quindi il limite di f(x,y) esiste e vale zero.
Esercizio 8.

Calcolare il seguente limite se esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2}$$

Svolgimento. Come prima cosa ci riportiamo nell'origine,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \log(x+1)}{x^2 + y^2}$$

Giusto per non usare sempre le direzioni principali o le rette (che comunque vanno bene), proviamo a calcolare il limite lungo la famiglia di curve $y = mx^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4 \log(x+1)}{x^2 + m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4 \log(x+1)}{x^2(1 + m^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2 \log(x+1)}{1 + m^2x^2} = 0$$

quindi possiamo affermare che, se il limite esiste, vale 0. Dobbiamo ora verificare l'esistenza del limite. Facendo lo stesso tipo di ragionamento dell'esercizio 6,

$$|\frac{y^2 \log(x+1)}{x^2 + y^2}| \leq |\frac{y^2 \log(x+1)}{y^2}| \to 0 \quad \text{per} \quad (x, y) \to (0, 0)$$

quindi possiamo affermare che il limite di f(x,y) esiste e vale 0. **Esercizio 9.**
Calcolare il seguente limite se esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4}$$

Svolgimento. Proviamo a calcolare il limite lungo le direzioni principali

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

mentre

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^4} = \infty$$

Siccome i due limiti sono diversi possiamo affermare che il limite di f(x,y) non esiste.

Esercizio 10.

Calcolare il seguente limite se esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}$$

Svolgimento. Se proviamo a calcolare il limite lungo le direzioni principali, troviamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$$

Proviamo a calcolare il limite lungo le rette $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^4(mx+1)}{x^2+|mx|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^4(mx+1)}{x^2+|m|} = 0$$

quindi possiamo affermare che, se il limite esiste, vale 0. Dobbiamo ora verificare l'esistenza del limite. Sfruttando la seguente disuguaglianza

$$|x^2y| \leq \frac{1}{2}(x^4+y^2)$$

si ottiene

$$|\frac{x^2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2}| \leq \frac{|x^2y|\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad \text{per} \quad (x,y)\to(0,0)$$

quindi possiamo affermare che il limite di f(x,y) esiste e vale 0.