TRACCIA DELLE SOLUZIONI DEI PROBLEMI DELL'ESAME DEL 24/2/2011

Esercizio 1 *(a) Determinare la curvatura della curva piana $y = e^x$ in x.*
(b) Determinare l'equazione dell'evoluta (ossia la curva descritta dal centro di curvatura) di questa curva. Che cosa si osserva?

Soluzione. La curva sta sul piano xy, l'equazione parametrica usuale è

$$\mathbf{C}(t) = (t,\ e^t).$$

(a) Poiché $\mathbf{C'}(t) = (1,\ e^t)$ e $\mathbf{C''}(t) = (0,\ e^t)$, la curvatura è data da

$$\kappa(t) = \frac{e^t}{(1 + e^{2t})^{3/2}}.$$

(b) Si ha $\mathbf{T}(t) = 1/\sqrt{1 + e^{2t}}(1,\ e^t)$, e $\mathbf{N}(t) = 1/\sqrt{1 + e^{2t}}(-e^t,\ 1)$. L'evoluta $\mathbf{E}$ ha quindi equazione parametrica data da

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{C}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}(t) = (t - 1 - e^{2t},\ \frac{1 + 2e^{2t}}{e^t}).$$

Nessuna osservazione particolare.

Esercizio 2 *Sia $f(x, y) = xy^2 - x^2y^4$ ed S la superficie di equazione $z = f(x, y)$.*
(a) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto $Q = (1, 1)$ nel punto Q.
(b) Determinare tutti i punti critici di f e provare che i punti che giacciono sulla curva di equazione $x = \frac{1}{2y^2}$ sono di massimo assoluto.
(c) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di $f(x, y)$ nel quadrato:

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Soluzione. (a) In Q, $f(1, 1) = 0$, e quindi la curva di livello ha equazione $xy^2 - x^2y^4 = 0$. Poiché $\nabla f(x, y) = (x^2 - 2xy^4, 2xy - 4x^2y^3)$, $\nabla f(1, 1) = (-1, -2)$, che è vettore normale alla curva di livello in Q. Quindi la retta tangente ha equazione

$$-1(x - 1) - 2(y - 1) = 0, \text{ ossia } x + 2y - 3 = 0.$$

(b) Le derivate parziali prime si annullano per $y = 0$ o per $x = \frac{1}{2y^2}$.
L'hessiano è nullo sia nel primo caso, sia nel secondo, e quindi non ci fornisce informazioni sui punti estremanti. Si osserva però che $f(x, y) = xy^2(1 - xy^2)$, e quindi, posto $t = xy^2$, è del tipo $t(1-t)$, che ha massimo per $t = 1/2$, ossia per $xy^2 = 1/2$. La stessa espressione invece per $y = 0$ assume valore nullo, e in prossimità di tale curva il segno dipende da x. Si conclude quindi che f sui punti della curva di equazione $x = \frac{1}{2y^2}$ assume valore massimo, pari a $1/4$.
(c) Per (b), *i punti di massimo assoluto sono quelli sull'arco* della curva $x = \frac{1}{2y^2}$ contenuto nel quadrato stesso, mentre non ci sono punti di minimo assoluto interni al quadrato. I

punti di minimo assoluto sono quindi da cercarsi sui bordi (i lati) del quadrato: tra i punti interni ai lati, con la solita tecnica della derivata, e tra gli estremi dei lati, con verifica diretta.
Si ha
$f(1,y) = y^2 - y^4$,
$f(-1,y) = -y^2 - y^4$,
$f(x,+/-1) = x - x^2$,
Nessuna di queste funzioni presenta punti di minimo interni ai lati del quadrato dato.
Pertanto i punti di minimo sono da cercarsi tra i 4 vertici del quadrato. Abbiamo:
$f(1,+/-1) = 0$ e $f(-1,+/-1) = -2$: questi due punti sono di *minimo assoluto*.

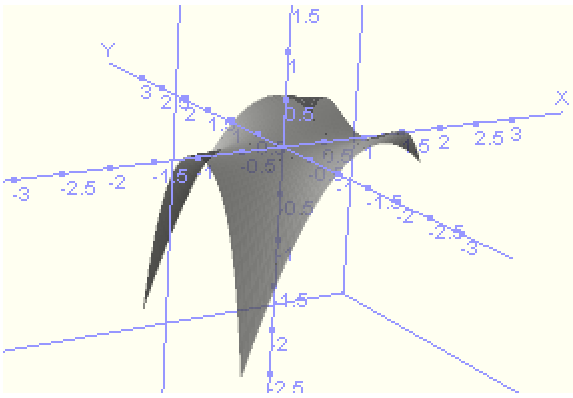

Figura 1: La funzione ristretta al quadrato

Esercizio 3 *Si consideri il campo vettoriale:*

$$\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}.$$

(a) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\boldsymbol{F}$ *lungo l'arco di curva*

$$r(t) : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3t \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$, *e percorso nel verso delle* t *crescenti.*
(b) $\boldsymbol{F}$ *è conservativo? Se si, determinare una funzione potenziale e utilizzarla per verificare il risultato del punto (b).*
(c) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva definito in (a).

Soluzione. (a) Indicata con γ la curva di equazione $r(t)$, si ha

$$\mathbf{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 3)$$

per cui

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma (z,y,x) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} (3t, 2\sin t, 2\cos t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 3)dt = ...12\pi$$

(b) Il campo $\mathbf{F}$ può essere conservativo, perché verifica le condizioni sulle derivate. Se ϕ è un potenziale, deve essere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = z, \text{ da cui } \phi = xz + C(y,z);$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y, \text{ ossia } \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = y, \text{ da cui } \phi = xz + \frac{y^2}{2} + C_1(z)$$

e infine

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = x, \text{ ossia } x + \frac{\partial C_1(z)}{\partial z} = x, \text{ da cui } \phi = xz + \frac{y^2}{2} + C_2,$$

con C_2 costante arbitraria.
(c) La curva ha lunghezza $2\pi\sqrt{13}$.

Esercizio 4 *Sia V il solido definito da:*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

(a) Descrivere la frontiera e calcolare il volume di V (si ricorda che $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ è la superficie che si ottiene dalla rotazione di $z = 2 - |x|$ attorno l'asse z).
(b) Calcolare il flusso totale di $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ uscente da V ed il flusso uscente attraverso ogni superficie che forma la frontiera di V. Quale teorema conviene usare?

Soluzione. Il solido è generato dalla rotazione della figura delimitata dalle due curve (vedi figura 2). (a) La frontiera è formata da due superfici: quella inferiore, S_1, è parte

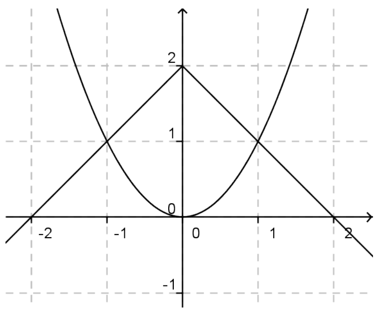

Figura 2: le curve che per rotazione descrivono la frontiera del solido

del paraboloide di rotazione $z = x^2 + y^2$, quella superiore, S_2, è parte del cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$; entrambe hanno per dominio il disco di centro l'origine e raggio 1 e si intersecano per $z = 1$.
Il volume del segmento P di paraboloide è $\pi/2$, mentre quello del cono C è $\pi/3$. Quindi $volume(V) = volume(P) + volume(C) = \pi/2 + \pi/3 = 5/6\pi$.
(b) Conviene usare il teorema della divergenza, che vale 3:

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot F dxdydz = 3 \int dxdydz = 3volume(V) = \frac{5}{2}\pi$$

Le superfici interessate sono S_1, S_2, e S_3 che è il cerchio che separa la parte del cono dalla parte del paraboloide; ha raggio 1, centro in (0,0,1) e quota $z = 1$. Il flusso attraverso S_3 è $\int_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ dove $\mathbf{N}$ è il versore *normale* a S_3 ed *esterno* a P, e che vale $(0, 0, 1)$. Poiché su S_3 si ha $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$, risulta

$$Flusso(S_3) = \int_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \int_{S_3} 1 dS = \int_{S_3} dS = \ area(S_3) = \pi.$$

Ora, il teorema della divergenza permette di dire che

$$Flusso(S_1) + Flusso(S_3) = \int_P \nabla \cdot F dxdydz,$$

e quindi, per differenza, $Flusso(S_1) = 3volume(P) - \pi = \pi/2$.
Infine, $Flusso(S_2) = Flusso(totale) - Flusso(S_1) = 5/2\pi - \pi/2 = 2\pi$.

Esercizio 5 *Risolvere le seguenti equazioni differenziali:*

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - e^{-y/x}$$

$$(b) \quad y'' + 2y' + y = \sin x$$

Soluzione. (a) Equazione a variabili separabili; la soluzione generale è

$$y = x \ln(C - \ln|x|).$$

(b) Equazione differenziale lineare del secondo ordine; la soluzione è

$$y = Ae^{-x} + Bxe^{-x} - 1/2 \cos x.$$