Soluzioni Esercizi Analisi Matematica II

- Esercizio 1
  $\lim_{(x,y)\to\infty} \sqrt{x^2+y^2-1} = +\infty,$

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad$ non esiste,

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \sin\frac{1}{xy} = 0,$

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log|x^2-y^2| \quad$ non esiste,

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{(x^2+y^2)(x+y-1)} = 0,$

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}$ non esiste,

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y + \log(x^2+y^2) = -\infty,$

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}}{x+y} = \infty$

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(xy)}{(xy)^{\frac{1}{4}}} = 0$

  $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$

  $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{-x^2+y^2} = 0.$

- Esercizio 2
  (i) $g'(x_0) = 0$, $g''(x_0) = -\frac{2}{3}$, $g'''(x_0) = \frac{2}{3}$

  (ii) $g'(x_0) = 0$, $g''(x_0) = -\frac{1}{2}$, $g'''(x_0) = -\frac{1}{2}$

  (iii) $g'(x_0) = -1$, $g''(x_0) = 4$, $g'''(x_0) = -24$

  (iv) $g'(x_0) = 0$, $g''(x_0) = 0$, $g'''(x_0) = 2$

- Esercizio 3
  $\int\limits_{\partial D} y^2dx + x^2dy = \int\int_D (2x-2y)dxdy = 0,$
  poiché il dominio é simmetrico rispetto alla bisettrice e $2x-2y$ cambia segno scambiando x con y.

- Esercizio 4
  $A(D) = \int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D}(-ydx+xdy) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-y(t)x'(t)+x(t)y'(t))dt = \frac{3}{8}\pi.$

- Esercizio 5
Usando il teorema della divergenza ed essendo $\nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}F_1 + \frac{\partial}{\partial 2}F_2 + \frac{\partial}{\partial z}F_3 = 1 + 0 + 0 = 1$, risulta

$$\Phi = \int\limits_{\partial D} F \cdot ndS = \int\int\int_D \nabla \cdot F dxdydz = \int\int\int_{\{x^2+y^2+z^2<25\}} 1dxdydz = \frac{4}{3}\pi 125$$

(l'ultimo integrale é il volume della sfera di centro l'origine e raggio 5).

- Esercizio 6
Usando coordinate sferiche di centro l'origine

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho \cos\theta,$$

risulta: $\int\int\int_T dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^5 \sin^3\theta \cos^2\varphi \sin\varphi d\rho = 0$

- Esercizio 7
Usando coordinate sferiche di centro l'origine

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, y = \rho \sin\theta \sin\varphi, z = \rho \cos\theta,$$

il dominio T si trasforma nel dominio S definito da

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 2\cos\theta \leqslant \rho \leqslant 4\cos\theta$$

Lo jacobiano della trasformazione di coordinate vale $\rho^2 \sin\theta$. Allora $\int\int\int_T f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_S \frac{\rho^2 \sin\theta}{1+\rho^2} d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \frac{\rho^2 \sin\theta}{1+\rho^2} d\rho =$
$= \frac{\pi}{2} \log \frac{\sqrt{17}}{5} + 2(\arctan 2 - \arctan 4)$.

- Esercizio 8
Usando la definizione:

$$\Phi = \int\limits_{\gamma} F \cdot ndS = \int_0^{2\pi} (\cos^3\theta \sin\theta \cos\theta + \cos^4\theta \sin\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (2\cos^4\theta \sin\theta) d\theta = 0$$