Tutoraggio Analisi II
a.a. 2012/2013
dott.ssa. Saoncella

Lezione del 21/1/2013

Esercizio 1

Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$F(x,y)=\left(\sin(x+y),\ \cos(x-y)\right)$$

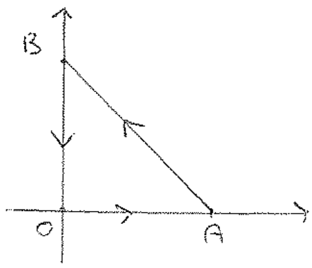
lungo la curva data dai lati del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ percorsi in senso antiorario.

Svolgimento

Questo esercizio può essere risolto in due modi.

Primo modo

Si considera una parametrizzazione dei tre segmenti.



Per parametrizzare i tre segmenti utilizziamo la seguente formula

$$\gamma(t)=t\cdot P+(1-t)Q \qquad t\in[0,1]$$

che ci da il segmento che va dal punto Q al punto P.
Indichiamo con $\gamma_1(t)$ la curva che parametrizza il segmento $\overline{OA}$. Quindi in base alla formula si ottiene:

$$\gamma_1(t)=\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma'(t)=(1,0) \qquad t\in[0,1]$$

Indichiamo con $\gamma_2(t)$ la curva che parametrizza il segmento $\overline{AB}$. Si ha

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = t \end{cases} \qquad \gamma_2'(t) = (-1, 1) \qquad t \in [0,1]$$

Infine indichiamo con $\gamma_3(t)$ la curva che parametrizza il segmento $\overline{BO}$

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 1-t \end{cases} \qquad \gamma_3'(t) = (0, -1) \qquad t \in [0,1]$$

abbiamo pertanto parametrizzato il triangolo in senso antiorario.
Procediamo con il calcolo del lavoro definito da

$$L := \int_\gamma F(x,y) \cdot ds = \int_\gamma F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Quindi

$$L = \int_0^1 (\sin(t), \cos t) \cdot (1,0)\, dt + \int_0^1 (\sin(1), \cos(1-2t)) \cdot (-1, 1)\, dt +$$

$$+ \int_0^1 (\sin(1-t), \cos(-1+t)) \cdot (0,-1)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sin t\, dt + \int_0^1 (-\sin(1) + \cos(1-2t))\, dt + \int_0^1 -\cos(-1+t)\, dt$$

$$= \left[-\cos t\right]_0^1 + \left[-\sin(1) \cdot t\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2} \cdot \sin(1-2t)\right]_0^1 + \left[-\sin(-1+t)\right]_0^1$$

$$= -\cos(1) + 1 - \sin(1) - \frac{1}{2}\sin(-1) + \frac{1}{2}\sin(1) + \sin(-1)$$

$$= 1 - \cos(1) - \sin(1)$$

SECONDO MODO

Utilizzando la formula di GAUSS-GREEN nel piano:

Sia D un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$. Se $v = P\underline{i} + Q\underline{j}$ è una funzione di classe C^1, allora sussiste la seguente formula

$$\iint_D (\partial_x Q - \partial_y P)\,dx\,dy = \int_{\partial^+ D} (P, Q) \cdot d\vec{\ell} = \int_{\partial^+ D} P\,dx + Q\,dy$$

dove $\partial^+ D$ è il bordo di D orientato in senso orario.

Ritornando all'esercizio, abbiamo:

$$P = \sin(x+y) \qquad \partial_y P = \cos(x+y)$$

$$Q = \cos(x-y) \qquad \partial_x Q = -\sin(x-y)$$

Quindi

$$\int_\gamma F(x,y) \cdot ds \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GAUSS-GREEN}}}{=} \iint_D \left[-\sin(x-y) - \cos(x+y)\right] dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} -\sin(x-y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} -\cos(x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \Big[-\cos(x-y)\Big]_0^{1-x} dx + \int_0^1 \Big[-\sin(x+y)\Big]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \Big[-\cos(\overbrace{x-1+x}^{2x-1}) + \cos x\Big] dx + \int_0^1 \Big[-\sin(x+1-x) + \sin(x)\Big] dx$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(2x-1)\Big|_0^1 + \sin x\Big|_0^1 - \sin(1)\cdot(x)\Big|_0^1 + (-\cos x)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(1) + \frac{1}{2}\sin(-1) + \sin(1) - \sin(1) - \cos(1) + 1 = 1 - \sin(1) - \cos(1)$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il campo vettoriale $F(x,y)=(3+2xy,\ x^2-3y^2)$ definito su $\mathbb{R}^2$.

(i) F è un campo vettoriale conservativo? Se sì, trovarne il potenziale.

(ii) Calcolare $\int_\gamma F\cdot ds$ dove $\gamma(t)=(e^t \sin t,\ e^t \cos t)$ con $0\le t\le \pi$

SVOLGIMENTO

Ricordiamo i seguenti fatti:

- $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso
- Su un dominio semplicemente connesso, se il rotore è nullo allora il campo vettoriale è conservativo

(i)
Nel nostro caso abbiamo che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso. Calcoliamo il rotore. Si ha

$$\operatorname{rot} F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{vmatrix}=k(\partial_y F_1-\partial_x F_2)=2x-2x=0$$

Quindi il campo è conservativo.

Se il campo è conservativo allora esiste un campo scalare U tale che $F=\nabla U$. Il campo U è detto <u>POTENZIALE</u> di F.

Per determinare il potenziale U osserviamo che

$$\partial_x U=3+2xy$$
$$\partial_y U=x^2-3y^2$$

Cioè stiamo dicendo che la derivata parziale di U rispetto ad x vale $3+2xy$ mentre la derivata parziale di U rispetto ad y vale x^2-3y^2.

Quindi devo andare ad integrare $\partial_x U$ rispetto ad x e $\partial_y U$ rispetto ad y ed andare ad eguagliare i risultati. Si ha

$$\int(3+2xy)\,dx=3x+x^2y+c_1(y) \qquad c_1(y)=\text{costante che dipende solo da } y$$

$$\int(x^2-3y^2)\,dy=x^2y-y^3+c_2(x) \qquad c_2(x)=\text{costante che dipende solo da } x$$

affinché valga l'uguaglianza tra i due risultati trovati scegliamo (5)

$$G_1(x) = 3x \quad e \quad G_2(y) = -y^3$$

Pertanto il potenziale cercato è

$$U(x,y) = 3x + x^2 y - y^3$$

Tutti gli altri potenziali differiscono per una costante.

(ii) Quando il campo è conservativo si ha che il lavoro è dato dalla differenza di potenziale valutato rispettivamente nel punto finale e nel punto iniziale. Cioè

$$\int_\gamma F \cdot ds = U(\gamma_B) - U(\gamma_A)$$

dove A rappresenta il punto iniziale, mentre B quello finale.
Nel nostro caso abbiamo che $0 \le t \le \pi$. Quindi il punto iniziale si trova ponendo $t=0$ in $\gamma(t)$, mentre quello finale ponendo $t=\pi$ in $\gamma(t)$.
Si ha quindi

$$A = \gamma(0) = (0,1)$$

$$B = \gamma(\pi) = (0, -e^{-\pi})$$

Pertanto il lavoro diventa

$$L = \int_\gamma F \cdot ds = U(0, -e^{\pi}) - U(0,1) = e^{3\pi} + 1$$

Esercizio 3

Dato il campo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dove

$$F(x,y,z) = (y-z)\,\underline{i} + (x+z)\,\underline{j} + (x+y)\,\underline{k}$$

calcolare il lavoro di F lungo la curva γ parametrizzata da

$$\gamma(t) = 2\cos(t)\,\underline{i} + \sqrt{2}\sin(t)\,\underline{j} + \sqrt{2}\sin t\,\underline{k} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Svolgimento

Si ha che: rot $F \neq 0$ pertanto il campo non è conservativo. Per calcolare il lavoro si deve usare la definizione. Quindi

$$L = \int_\gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

Calcoliamo

$$\gamma'(t) = -2\sin(t)\,\underline{i} + \sqrt{2}\cos(t)\,\underline{j} + \sqrt{2}\cos(t)\,\underline{k}$$

Pertanto

$$L = \int_0^{2\pi} \left[(2\cos(t) + \sqrt{2}\sin t)\,\underline{j} + (2\cos t + \sqrt{2}\sin t)\,\underline{k}\right] \cdot \left[-2\sin t\,\underline{i} + \sqrt{2}\cos t\,\underline{j} + \sqrt{2}\cos t\,\underline{k}\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2\sqrt{2}\cos^2(t) + 2\sin t \cdot \cos t\right] dt + \int_0^{2\pi} \left[2\sqrt{2}\cos^2 t + 2\sin t \cdot \cos t\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\sqrt{2}\cos^2(t)\,dt + \int_0^{2\pi} 4\sin t \cdot \cos t\,dt$$

$$= 4\sqrt{2}\pi + 4\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\pi$$