

1) Studiare se $\exists$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e se f è continua in $x=0$ (giustificare ogni risposta)

o.e. a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{x^2(x-1)}$

b) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

ii) Definire la continuità di una funzione in un punto.

Def. Sia $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$

Se x_0 è un punto isolato di $A \Rightarrow f$ è continua in x_0

Se x_0 è di accumulazione per $A \Rightarrow f$ è continua in x_0 se

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

a) Sia $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \cup \{0\}$

$x_0 = 0$ è un punto isolato di $A \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e f è continua in $x_0 = 0$

b) Sia $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

$A = \mathbb{R} \setminus \{\pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}$

$x_0 = 0 \notin A \Rightarrow f$ non è continua in $x_0 = 0$

$x_0 = 0$ è di accumulazione per A

$$\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$