Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova d'esame (08/07/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova di **MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)** (08/07/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome _____ Matr. _____ Corso _____
IN STAMPATELLO VR · · · · · · A-E / F-O / P-Z

►►►► Test a quiz sul retro ►►►►

(1) Nello spazio cartesiano sono dati i punti $A(1,2,0)$ e $B(-3,0,1)$ e i vettori $\vec{v} = (2,-1,1)$ e $\vec{w} = (0,3,-1)$. Determinare, in forma parametrica e cartesiana, il piano Π ortogonale a $\vec{v}$ e passante per A; e la retta r passante per B e ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$. Dire infine quanto valgono l'area del parallelogrammo e l'angolo convesso individuati da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = 2\log|x| + \dfrac{x}{x+1}$, e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$, dove $f(x)$ è la funzione dell'ex. 2.

(b) Disegnare $S = \{(x,y) : x(x-4) \le y \le \sin 2x\,,\ x - \pi \le 0\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x,y) = (x+2)(xy+2)$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali.

(b) Disegnare $\mathcal{T} = \{(x,y) : |x| \le y \le 2\}$, e calcolare gli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$.

(5) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 5y = 5\cos x + 4e^{-x}$, e tutte quelle dell'equazione differenziale $(x+1)^3 y' = 2y^2$. Infine, tra tutte queste soluzioni trovare quelle che in $x = 0$ valgono $\frac{1}{2}$ e hanno pendenza 1.

[1] Per lo studio di zeri e segno sarà utile un confronto grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.

Matematica e Statistica (A-E)

Prova di **STATISTICA (A-E) - Gobbi** (08/07/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome _____ Matr. _____

IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

**** Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare **** ►►►► Test a quiz sul retro ►►►►

ESERCIZIO 1

X	Frequenza
1	20
4	15
6	25
10	40

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) disegnare il grafico della distribuzione di frequenze;
d) la varianza usando l'origine A=3.

ESERCIZIO 2

X	Y
5	40
6	32
12	15
13	13

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX ;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente.

ESERCIZIO 3

La tabella seguente riporta lo studio per l'individuazione delle cause che hanno comportato l'influenza intestinale nel 2011 in Germania (*). Si è quindi condotta un'analisi su un campione di persone, alcune sane, altre malate, ciascuna delle quali aveva mangiato uno (e solo uno) dei cibi sospetti.
I risultati sono riassunti dal prospetto seguente:

	Sano	Malato
Cetrioli	40	10
Soia	20	5
Hamburger	15	10

a) Qual è l'alimento che comporta i maggiori rischi di contrarre l'infezione?
b) Determinare la probabilità di aver mangiato Soia e di essere Malati (l'uno E l'altro);
c) Calcolare la probabilità di aver mangiato Soia o Hamburger (l'uno O l'altro);
d) Calcolare la probabilità di aver mangiato Soia e di essere Sani (l'uno E l'altro).

(*) Dati fittizi

Matematica e Statistica (F-O, P-Z)

Prova di STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma (08/07/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome _____ Matr. _____

IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** ►►►► Test a quiz sul retro ►►►►

Esercizio 1)
Uno studio di analisi veterinarie vuole monitare il livello di soddifazione dei pazienti riguardo al trattamento ricevuto. Questo viene espresso mediante cinque possibili valutazioni Insufficiente (I), Scarso (S), Accettabile (A), Discreto (D) e Buono (B). Dopo due settimane si sono ottenute le seguenti valutazioni

A	D	I	S	B	A	I	I	S	A
S	D	B	S	A	B	D	A	S	I
B	I	D	A	A	D	I	S	D	A
D	B	S	I	A	I	D	B	A	D

Il candidato

a) determini la tipologia del carattere.
b) illustri la serie utilizzando una rappresentazione grafica opportuna
c) descriva cosa indica l'indice di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie di dati in esame.
d) descriva cosa indicano gli indici di curtosi e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie di dati in esame.

Esercizio 2)
Un ricercatore sospetta che la produzione di glucagone da parte del pancreas possa essere stimolata dall'assunzione della vitamina C. Per verificare la sua teoria fa assumere ad un soggetto un preciso quanitativo di vitamina C due ore dopo il pranzo ed osserva la produzione di glucagone dopo 15 minuti dall'assunzione. L'esperimento viene ripetuto per 5 gg ottenendo i seguenti risultati

Giorno	1	2	3	4	5
Vitamina C [mg]	0	10	50	60	80
Glucagone [mg/dl]	1	3	5	6	10

Il candidato

a) descriva il tipo di serie ottenuta e ne fornisca una opportuna rappresentazione grafica.
b) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione
c) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità
d) Ipotizzando un legame di tipo lineare,
   1. calcoli l'opportuna regressione
   2. ipotizzi quale sarebbe il livello di glucagone corrispondente ad una ingestione di 92 mg di vitamina C.
   3. indichi, motivando numericamente la risposta, se il legame ipotizzato è attendibile.

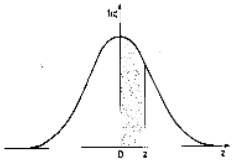
Esercizio 3)
Il candidato stimi puntualmente e per intervallo la varianza della concetrazione di glucagone in adulto basandosi sulle misurazioni di concentrazione riportate nell'Esercizio 2.

Esercizio 4)
Si considerino i due eventi incompatibili E_1 ed E_2. Sapendo che $P(E_1) = 0.4$ e $P(E_2) = 50\%$ il candiato calcoli le probabilità dei seguenti eventi:

a) evento E_1 intersezione E_2
b) evento E_2 condizionato E_1
c) evento E_2 unito E_1.

Tavola I

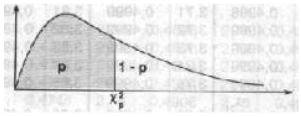
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Soluzioni

MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)

(1) Il piano Π, ortogonale a $\vec{v} = (2,-1,1)$, avrà equazione cartesiana del tipo $2x - y + z + k = 0$, e il passaggio per $A(1,2,0)$ dà $k = 0$; due vettori ortogonali a $\vec{v}$ e non paralleli tra loro sono ad esempio $\vec{u}_1 = (1,2,0)$ e $\vec{u}_2 = (0,1,1)$, dunque una forma parametrica è $\Pi = \{(1,2,0) + s(1,2,0) + t(0,1,1) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(1+s, 2+2s+t, t) : s,t \in \mathbb{R}\}$. La retta r passa per $B(-3,0,1)$ e, essendo ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$, sarà parallela al prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = (-2,2,6)$ (o anche al suo multiplo scalare $(1,-1,-3)$), da cui la forma parametrica $r = \{(-3,0,1) + t(1,-1,-3) : t \in \mathbb{R}\} = \{(-3+t, -t, 1-3t) : t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo $t = -y$ in $x = -3 + t$ e $z = 1 - 3t$ si ottiene poi una forma cartesiana dal sistema tra $x + y + 3 = 0$ e $3y - z + 1 = 0$. L'area del parallelogrammo individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vale $|\vec{v} \wedge \vec{w}| = \sqrt{44}$, mentre l'angolo convesso θ compreso tra essi deve soddisfare $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \cos\theta$, ovvero $\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = \frac{-4}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = -\frac{2}{\sqrt{15}} \sim -0{,}51$, e dunque $\theta = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{15}})$ (un angolo ottuso leggermente maggiore di $\frac{2\pi}{3}$).

(2) (Figura 1) La funzione $f(x) = 2\log|x| + \frac{x}{x+1}$ è definita per $x \neq -1$ e $x \neq 0$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio; non ha parità ne' periodicità. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = -\frac{x}{2(x+1)}$; un confronto grafico tra $\log|x|$ (il logaritmo simmetrico) e $-\frac{x}{2(x+1)}$ (funzione omografica di asintoti $x = -1$ e $y = -\frac{1}{2}$ e con grafico passante per l'origine) mostra chiaramente che esiste un unico punto $\alpha \in]0,1[$ (vale in realtà $\alpha \sim 0{,}8$) tale che ciò vale se e solo se $x = \alpha$. Similmente si ha $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > -\frac{x}{2(x+1)}$, e il confronto grafico mostra che ciò vale se e solo se $x < -1$ oppure $x > \alpha$. I limiti interessanti sono tutti determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^{\mp}} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to0^{\mp}} f(x) = -\infty$; pertanto $x = -1$ e $x = 0$ sono asintoti verticali bilateri, e i conti mostrano facilmente che non ci sono asintoti obliqui (questo non è inatteso: in effetti, l'andamento di $f(x)$ agli infiniti è di tipo logaritmico). Derivando si ottiene $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+5x+2}{x(x+1)^2}$, dunque si ha $f'(x) = 0$ per $x = -2$ o per $x = -\frac{1}{2}$, e $f'(x) > 0$ per $-2 < x < -1$, $-1 < x < -\frac{1}{2}$ o $x > 0$: ne ricaviamo che c'è un minimo locale in $x = -2$ (che vale $f(-2) = 2\log 2 + 2 \sim 3{,}4$) e un massimo locale in $x = -\frac{1}{2}$ (che vale $f(-\frac{1}{2}) = 2\log\frac{1}{2} - 1 = -2\log 2 - 1 \sim -2{,}4$). Infine, anche se non è richiesto, esaminiamo la convessità. Derivando ancora si ottiene $f''(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{(x+1)^3} = -2\frac{(x+1)^3+x^2}{x^2(x+1)^3}$, dunque $f''(x) = 0$ se e solo se $(x+1)^3 = -x^2$, e un confronto grafico mostra che ciò avviene in un solo punto $\beta \in]-4,-3[$ (vale in realtà $\beta \sim -3{,}1$); sempre il confronto grafico e lo studio del segno mostra che $f''(x) > 0$ (ovvero f è convessa) se e solo se $\beta < x < -1$.

(3) (a) (Figura 1) Vale $\int f(x)\,dx = 2\int \log|x|\,dx + \int \frac{x}{x+1}\,dx = 2(x\log|x| - \int x\frac{1}{x}\,dx) + \int(1 - \frac{1}{x+1})\,dx = 2x(\log|x| - 1) + x - \log|x+1| + k$, dunque $\int_1^4 f(x)\,dx = (8\log 4 - 4 - \log 5) - (-1 - \log 2) = 17\log 2 - \log 5 - 3 \sim 7{,}2$.

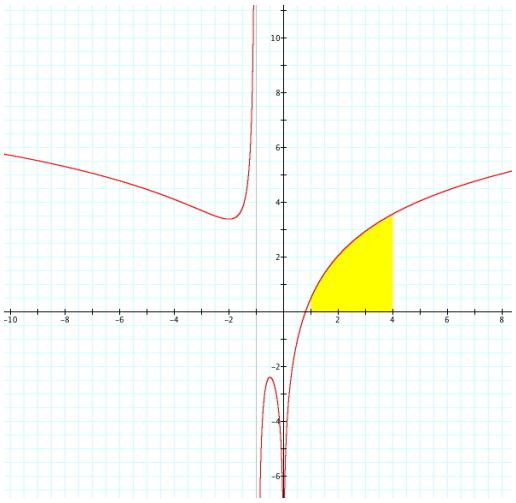
(b) (Figura 2) La zona di piano $S = \{(x,y) : x(x-4) \le y \le \sin 2x\,,\ x - \pi \le 0\}$ è quella sotto la sinusoide $y = \sin 2x$, sopra la parabola $y = x^2 - 4x$ e a sinistra della retta $x = \pi$, dunque ha area $\int_0^{\pi}(\sin 2x - (x^2 - 4x))\,dx = (-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2]_0^{\pi} = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\pi^3 + 2\pi^2) - (-\frac{1}{2}) = (2 - \frac{\pi}{3})\pi^2 \sim 9{,}4$.

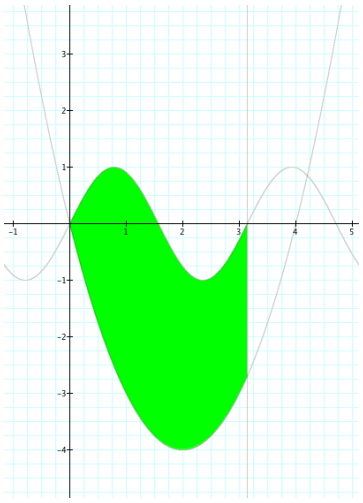
(4) (Figura 3) La funzione $g(x,y) = (x+2)(xy+2)$ ha come dominio tutto il piano $\mathbb{R}^2$, ed è differenziabile perché le sue derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x} = 1(xy+2) + (x+2)y = 2(xy+y+1)$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = x(x+2)$ sono evidentemente continue. Si ha $g(x,y) = 0$ sui punti dell'iperbole equilatera $xy = -2$ e della retta verticale $x = -2$. Il fattore $x+2$ è positivo a destra della retta $x = -2$ e negativo a sinistra, il fattore $xy + 2$ è positivo nella zona compresa tra i due rami dell'iperbole e negativo altrove, e il segno di g ne segue per prodotto. L'unico limite interessante è quello in ∞_2, che non esiste: infatti tendendovi lungo i rami dell'iperbole la funzione è nulla, mentre tendendovi ad esempio lungo la retta orizzontale $y = 1$ essa tende a $+\infty$. Dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ricavano i punti stazionari $P(0,-1)$ e $Q(-2,1)$; e se si calcola la matrice hessiana $\mathsf{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2(x+1) \\ 2(x+1) & 0 \end{pmatrix}$, in essi, il relativo criterio dice che si tratta di due punti di sella. Non vi sono dunque estremi locali per g.

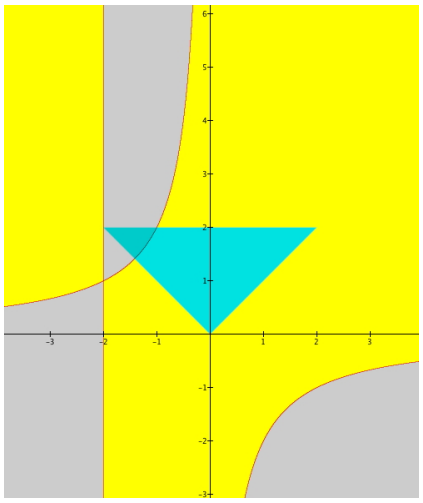
(b) (Figura 3) L'insieme $\mathcal{T} = \{(x,y) : |x| \le y \le 2\}$ è il triangolo (pieno, con i lati compresi) di vertici $A(-2,2)$, $B(2,2)$ e $O(0,0)$. Per la ricerca degli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$ (che esistono in base a Weierstrass) dividiamo $\mathcal{T}$ nelle zone $\mathcal{T}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{T}_1$ del lato orizzontale $\overline{AB}$ privato dei vertici; $\mathcal{T}_2$ del lato obliquo $\overline{AO}$ privato dei vertici; $\mathcal{T}_3$ del lato obliquo $\overline{BO}$ privato dei vertici; e $\mathcal{T}_4 = \{A(-2,2),\ B(2,2),\ O(0,0)\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g: come visto prima i soli punti stazionari sono P e Q, che però sono al di fuori di $\mathcal{T}_0$. • Sul lato $\mathcal{T}_1$ la funzione vale

$\varphi_1(x) := g(x,2) = 2(x+1)(x+2)$ con $-2 < x < 2$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x) = 2(2x+3)$: ciò avviene per $x = -\frac{3}{2}$, e si ottiene dunque il punto $C(-\frac{3}{2}, 2)$. • Sul lato $\mathcal{T}_2$ la funzione vale $\varphi_2(x) := g(x,-x) = (x+2)(2-x^2)$ con $-2 < x < 0$. La derivata $\varphi_2'(x) = 2(2-4x-3x^2)$ si annulla in $x = \frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$, dunque si ottiene il punto $D(-\frac{2+\sqrt{10}}{3}, \frac{2+\sqrt{10}}{3})$. • Sul lato $\mathcal{T}_3$ la funzione vale $\varphi_3(x) := g(x,x) = (x+2)(x^2+2)$ con $0 < x < 2$; tuttavia la derivata $\varphi_3'(x) = 3x^2+4x+2$ non si annulla mai, dunque non si ottengono punti interessanti. • Infine, i punti A, B e O di $\mathcal{T}_4$ vanno tenuti presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei cinque punti A, B, O, C, D: poiché $g(A) = 0$, $g(B) = 24$, $g(O) = 4$, $g(C) = -\frac{1}{2}$ e $g(D) = -\frac{4(5\sqrt{10}-14)}{27}$, e dopo aver verificato direttamente che $g(C) < g(D)$, si può concludere che il massimo assoluto di g su $\mathcal{T}$ è 24 (assunto in B) e il minimo è $-\frac{1}{2}$ (in C).

(5) L'equazione differenziale $y'' + 2y' + 5y = 5\cos x + 4e^{-x}$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 + 2t + 5 = 0$ ha soluzioni $t = -1 \mp 2i$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con $5\cos x$ avrà la forma $\tilde{y}_1(x) = a\cos x + b\sin x$, e il calcolo dà $(a,b) = (1, \frac{1}{2})$; una soluzione particolare per la completa con $4e^{-x}$ avrà la forma $\tilde{y}_2(x) = ce^{-x}$, e il calcolo dà $c = 1$; dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \cos x + \frac{1}{2}\sin x + e^{-x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $(x+1)^3 y' = 2y^2$ è del primo ordine a variabili separabili. Dopo aver notato che la costante $y \equiv 0$ è soluzione, separando le variabili e integrando si ottiene $\int y^{-2}\,dy = \int 2(x+1)^{-3}\,dx$ ovvero $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{(x+1)^2} + k$, ovvero $y(x) = \frac{(x+1)^2}{k(x+1)^2+1}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. • Imponendo che $y(0) = \frac{1}{2}$ e $y'(0) = 1$ nella prima famiglia di soluzioni si ottiene $(A,B) = (-\frac{3}{2}, 0)$, ovvero l'unica soluzione $y(x) = -\frac{3}{2}e^{-x}\cos 2x + \cos x + \frac{1}{2}\sin x + e^{-x}$. Quanto alla seconda famiglia, chiedendo che $y(0) = \frac{1}{2}$ si ottiene $k = 1$; però, essendo in generale $y' = \frac{2y^2}{(x+1)^3}$, nel nostro caso si ricava $y'(0) = \frac{2y(0)^2}{(0+1)^3} = \frac{1}{2} \neq 1$, dunque nessuna tra queste soluzioni soddisfa ai requisiti richiesti.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2, con l'integrale (in giallo) richiesto nell'ex. (3.a). **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g. Il triangolo $\mathcal{T}$ (azzurro).

STATISTICA (A-E) - Gobbi

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) disegnare il grafico della distribuzione di frequenze;
d) la varianza usando l'origine A=3.

x	**f**	**x*f**	**f/x**	**ln(x)**	**ln(x)*f**	**x-3**	**$(x-3)^2$**	**$(x-3)^2$*f**
1	20	20	20,00	0	0	-2	4	80
4	15	60	3,75	1,3863	20,7944	1	1	15
6	25	150	4,1667	1,7918	44,794	3	9	225
10	40	400	4,0000	2,3026	92,1034	7	49	1960
	100	**630**	**31,9167**	**5,4806**	**157,6918**			**2280**

a) Calcolo della media aritmetica, armonica e geometrica:

M(X) = $\frac{\Sigma x * f}{\Sigma f} = \frac{630}{100} =$ **6,3**

Ma(X) = $\frac{\Sigma f}{\Sigma f/x} = \frac{100}{31,9167} =$ **3,1332**

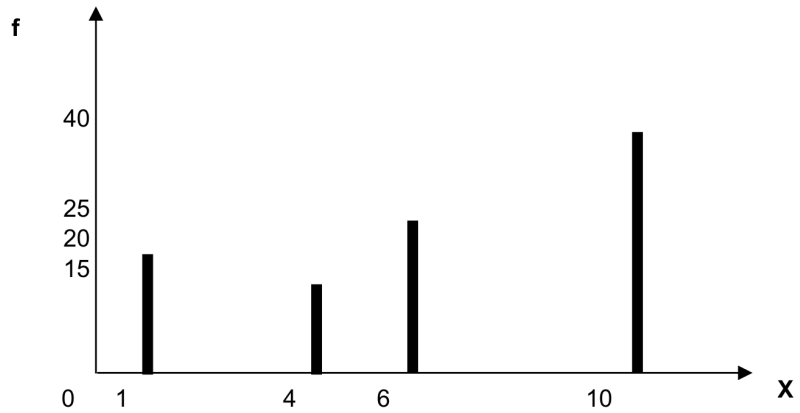
ln(Mg(X))= $\frac{\Sigma \ln(x) * f}{\Sigma f} = \frac{157,6918}{100} =$ **1,5769** **Mg(X)** = $e^{1,5769}$ = **4,840**

b) Calcolo della mediana e della moda:

x50 =< mediana =< x51 : **me** = **6**

moda = 10

c) Disegnare il grafico della distribuzione di frequenze:



d) Calcolo della varianza usando l'origine A=2:

$$V_A(X) = \frac{2280}{100} = \mathbf{22,8}$$

$$V(X) = V_A(X) - (M(X)-3)^2 = \mathbf{11,91}$$

ESERCIZIO 2

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
5	40	200	25	1600
6	32	192	36	1024
12	15	180	144	225
13	13	169	169	169
36	**100**	**741**	**374**	**3018**

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX ;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente.

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \qquad a = M(Y) - bM(X)$$

$$M(X) = \frac{36}{4} = \mathbf{9}$$

$$M(Y) = \frac{100}{4} = \mathbf{25}$$

$$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{741}{4} - 9 * 25 = \mathbf{-39,75}$$

$$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{374}{4} - 9^2 = \mathbf{12,5}$$

$$\mathbf{b =} \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{-39,75}{12,5} = \mathbf{-3,18}$$

$$\mathbf{a =} M(Y) - bM(X) = 25 - (-3,18)*9 = \mathbf{53,62}$$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$V(Y) = \frac{3018}{4} - 25^2 = \mathbf{129,5}$$

$$\sigma(Y) = RADQ(129,5) = \mathbf{11,3798}$$

$$\sigma(X) = RADQ(12,5) = \mathbf{3,5355}$$

$$\mathbf{r =} \frac{-39,75}{11,3798 * 3,5355} = \mathbf{-0,988}$$

Si registra una forte relazione lineare indiretta

ESERCIZIO 3

La tabella seguente riporta lo studio per l'individuazione delle cause che hanno comportato l'influenza intestinale nel 2011 in Germania (*). Si è quindi condotta un'analisi su un campione di persone, alcune sane, altre malate, ciascuna delle quali aveva mangiato uno (e solo uno) dei cibi sospetti.
I risultati sono riassunti dal prospetto seguente:

	Sano	**Malato**	
Cetrioli	40	10	**50**
Soia	20	5	**25**
Hamburger	15	10	**25**
	75	**25**	**100**

a) Qual è l'alimento che comporta i maggiori rischi di contrarre l'infezione?
b) Determinare la probabilità di aver mangiato Soia e di essere Malati (l'uno E l'altro)
c) Calcolare la probabilità di aver mangiato Soia o Hamburger (l'uno O l'altro)
d) Calcolare la probabilità di aver mangiato Soia e di essere Sani (l'uno E l'altro)

(*) Dati fittizi

a) Qual è l'alimento che comporta i maggiori rischi di contrarre l'infezione?

Risolvendo utilizzando le probabilità condizionate:

$$P(M/Cetrioli) = \frac{10}{100} * \frac{100}{50} = \mathbf{0,2}$$

$$P(M/Soia) = \frac{5}{100} * \frac{100}{25} = \mathbf{0,2}$$

$$P(M/Hamb) = \frac{10}{100} * \frac{100}{25} = \mathbf{0,4}$$

Metodo alternativo (n. casi malati su n. casi totali per singolo alimento):

$$P(M/Cetrioli) = \frac{10}{50} = \mathbf{0,2}$$

$$P(M/Soia) = \frac{5}{25} = \mathbf{0,2}$$

$$P(M/Hamb) = \frac{10}{25} = \mathbf{0,4}$$

b) Determinare la probabilità di aver mangiato Soia e di essere Malati (l'uno E l'altro)

$$P(Soia \cap M) = \frac{5}{100} = \mathbf{0,05}$$

c) Calcolare la probabilità di aver mangiato Soia o Hamburger (l'uno O l'altro)

P(Soia) + P(Hamburgher) dato che sono incompatibili non c'è l'intersezione

$$\frac{25}{100} + \frac{25}{100} = \mathbf{0,5}$$

d) Calcolare la probabilità di aver mangiato Soia e di essere Sani (l'uno E l'altro)

$$P(Soia \cap S) = \frac{20}{100} = \mathbf{0,2}$$

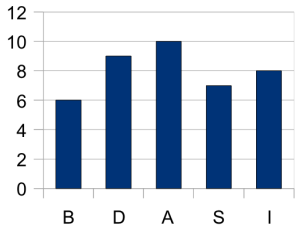
STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma

Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto espresso da giudizi e non numeri) ordinabile (in quanto si i giudizi possono essere ordinati).

b) illustri la serie utilizzando una rappresentazione grafica opportuna.



Per caratteri qualitativi ordinabili sono possibili due tipologie di rappresentazioni grafiche: il diagramma a barre ed il diagramma a torta.
In questa soluzione si è scielto di rappresentare il primo. Un diagramma a barre è costituito da una serie di barre (orizzontali o verticali) poste in un diagramma cartesiano in cui su di un asse son riportate le modalità del carattere e sull'altro si riportano le frequenze assolute.

c*) descriva cosa indica l'indice di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie di dati in esame..*

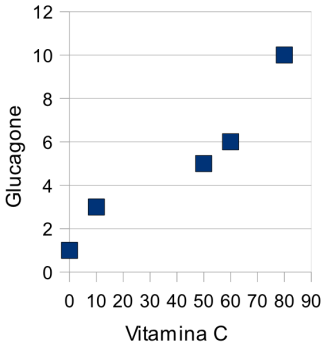
L'indice di posizione di una serie di osservazione indica il valore centrale che viene assunto dalla serie. Gli indici di posizione visti a lezione sono tre: moda, mediana e media. Per i caratteri in esame sono calcolabili sono i primi due. La moda (ovvero la modalità cui corriponde la modalità maggiore) della serie è A.

d) descriva cosa indica l'indice di curtosi e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie di dati in esame.

Gli indici di curtosi indicano quanto la serie di osservazioni si discosta da una distribuzione normale avente stessa stessa media e varianza della serie di osservazioni. Gli indici di curtosi sono calcolabili solo per caratteri quantitativi.

Esercizio 2)

a) descriva il tipo di serie ottenuta e se ne fornisca una opportuna rappresentazione grafica.



La serie descritta è una serie bivariata composta dai seguenti caratteri
X: vitamina C fornita dopo il pasto.
Y: glucagone misurato nell'individuo dopo 15 min dal pasto.
Una opportuna rappresentazione per una bivariata in cui tutti i caratteri sono di tipo quantitativo è il dia gramma a dispersione riportato a lato

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando due caratteri quantitativi ammette due indici di posizione la media e la moda. Poichè la seconda non fornisce informazioni (non vi sono frequenze assolute maggiori di uno) si calcola la media che viene calcolata come il vettore delle medie dei due caratteri. Si ha quindi che

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{1=1}^{N} x_i=\frac{200}{5}=40 \qquad \bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{1=1}^{N} y_i=\frac{25}{5}=5$$

Da cui la media richiestà è il punto (40 ; 5).

c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata composta da due indici carattere quantiativi ammette un indice sintetico di variabilità: la matrice varianza/covarianza. Questa matrice si compone della varianze dei due caratteri e della covarianza della serie. Impostati i conti nella forma tabellare seguente

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})$
1	0	1	0	1	-40.000	-4.000	160
2	10	3	100	9	-30.000	-2.000	60
3	50	5	2500	25	10.000	0.000	0
4	60	6	3600	36	20.000	1.000	20
5	80	10	6400	100	40.000	5.000	200
	200	25	12600	171			440.000

si possono ricavare i tre indici richiesti

$$\sigma_x^2=\left(\frac{1}{N}\sum_{1=1}^{N}x_i^2\right)-\bar{x}^2=\frac{12600}{5}-40^2=920 \qquad \sigma_y^2=\left(\frac{1}{N}\sum_{1=1}^{N}y_i^2\right)-\bar{y}^2=\frac{171}{5}-5^2=9.2$$

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{1=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{440}{5}=88$$

Da cui si ricava la seguente matrice varianza/covaranza

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}920 & 88\\ 88 & 9.2\end{bmatrix}$$

d.1) Ipotizzando un legame di tipo lineare, calcoli l'opportuna regressione
Ipotizzando una modello di tipo lineare y = ax +b si dimostra che i parametri hanno i seguenti valori

$$a=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}=\frac{88}{920} \qquad b=\bar{y}-a\,\bar{x}=5-\frac{88}{920}40=5-\frac{88}{23}=\frac{(115-88)}{23}=\frac{27}{23} \quad \text{da cui} \quad \hat{y}=\frac{88}{920}x+\frac{27}{23}$$

d.2) Ipotizzando un legame di tipo lineare, ipotizzi quale sarebbe il livello di glucagone corrispondente ad una ingestione di 92 mg di vitamina C.
In questo caso e sufficiente applicare la retta di regressione nel punto in cui si vuole ottenere la stima. Si ha quindi

$$\hat{y}=\frac{88}{920}92+\frac{27}{23}=\frac{88}{10}+\frac{27}{23}=9.973$$

d.3) Ipotizzando un legame di tipo lineare, indichi, motivando numericamente la risposta, se il legame ipotizzato è attendibile.
Una buona stima della bontà dell'approssimazioneè è data dal coefficiente di correlazione lineare di Pearson

$$R^2=\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}=\frac{88^2}{920\cdot 9.2}=0.915$$

Un valore prossimo ad 1 del coefficiente di correlazione linare del Pearson indica una buona approssimazione del modello adottato.

Esercizio 3)

Nel testo si effettuano divese misure di una grandezza ignota da stimare. Possiamo modellare questo problema come l'estrazione di una variabile casuale

Y :*concentrazione di glucagone in un adulto*

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $N = 5$ realizzazioni della v.c.

a) stimare puntualmente la varianza.
Continuando con il modello precedentemente fatto il testo richiede di stimare Var[Y] puntualmente. Questa stima può essere effettuata ricordando che la varianza viene stimata correttamente mediante la varianza campionaria s^2. Sfruttando i conti svolti nel precedente esercizio, e ricordando la formula della varianza campionaria otteniamo che

$$Var[Y]=s^2=\frac{\sigma_y^2}{N-1}N=\frac{9.2}{4}5=11.5$$

b) stimare per intervallo la varianza.
Nei termini del modello precedentemente illustrato il testo richiede di stimare Var[Y] per intervallo. Questa stima

può essere effettuata ricordando lo stimatore varianza campionaria al crescere della dimensione del campione si tende a distribuirsi come un $\frac{Var[Y]}{N-1}\chi^2(N-1)$. Pertanto per si ha che la stima voluta ad un livello di confidenza α è data dal seguente intervallo

$$Var[Y]\in\left[\frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-1)};\frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)}\right]$$

Considerare $N = 5$ un valore sufficiente per la convergenza dello stimatore è un ipotesi molto forte, quindi si considererebbe valida l'asserzione che mancano dati per fare la stima richiesta. In ogni caso, se si ritenesse la dimensione del campione adeguata si avrebbe la seguente stima al 95%

$$Var[Y]\in\left[\frac{4\cdot 11.5}{\chi^2_{0.975}(4)};\frac{4\cdot 11.5}{\chi^2_{0.025}(4)}\right]=\left[\frac{47}{11.1};\frac{47}{0.484}\right]=[4.234;97.107]$$

Esercizio 4)
I due eventi considerati sono incompatibili il che vuol dire che non possono verificarsi contemporaneamente. In termini probabilistici questo implica che:

$$P(E_1\cap E_2)=0$$

a) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2.

Vedi definizione iniziale

b) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1

Poiché i due eventi sono incompatibili non è possibile che si verifichi un evanto sapendo se che i è verificato l'altro. In ogni caso lo stesso risultati poteva essere ottenuto utilizzando la definzione di probabilità condizionata:

$$P(E_2|E_1)=\frac{P(E_1\cap E_2)}{P(E_1)}=\frac{0}{0.4}=0$$

c) Il candiato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2..

La probabilità dell'evento unione di due eventi indipendenti è pari alla somma delle probabilità (90 %). Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando la definzione assiomatica di probabilità

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=0.4+0.5-0=0.9$$