Matematica – Autoverifica n. 3

Integrazione

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

mercoledì 2 dicembre 2009

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento che sarà fornito martedì 8/12. **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato. **(3)** Terminata l'autovalutazione, collegandosi al sito `http://docenti.math.unipd.it/maraston/FormValut_0910/compito13.php` (*attenzione a scrivere correttamente il carattere "underscore" "_ "*) da martedì 08/12 a giovedì 10/12 sarà possibile comunicare via web in forma anonima i risultati dell'autovalutazione esercizio per esercizio, assieme ad eventuali commenti: queste informazioni serviranno al docente come riscontro del grado di comprensione generale delle nozioni insegnate.
Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 24 pt (4×6 pt). **Ex. 2:** 36 pt (2×18 pt). **Ex. 3:** 20 pt. **Ex. 4:** 20 pt (2×10 pt). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.
Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

(1) Calcolare i seguenti integrali definiti:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{8x^4+x}{2x^2-3x+1}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x-\cos x+1}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\log x}{x\sqrt[3]{\log x+2}}\,dx$.

(2) (a) Studiare l'andamento della funzione $f(x) = x\,\log(x+3)$ e calcolare $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$.

(b) Studiare l'andamento della funzione $g(x) = \frac{\sin x}{2\cos x-1}$; dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si può calcolare l'integrale $\int_0^a g(x)\,dx$, e dire quanto vale.

(3) Dato $\alpha > 0$, si consideri l'insieme $U_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -\frac{\alpha}{x+1} \le y \le \alpha x^2 + \frac{1}{\alpha}\}$. Dopo aver cercato di capire come tale insieme varia al variare di α (ad esempio disegnarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$) calcolarne l'area, e dire per quale valore di α tale area diventa minima.

(4) Disegnare le seguenti regioni limitate del piano cartesiano e calcolarne l'area:

(a) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le \sin^2 x,\ x \ge 0,\ |x|+|y| \le \pi\}$;

(b) $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} - 2 \le y \le e^{-x},\ y^2+y-2 \le x \le 1\}$.

Soluzioni.

(1) (a) $\boxed{\int_{-1}^{0} \frac{8x^4+x}{2x^2-3x+1}\,dx}$ Dopo la divisione, si scrive $8x^4 + x = (2x^2 - 3x + 1)(4x^2 + 6x + 7) + 16x - 7$, dunque $\int \frac{8x^4+x}{2x^2-3x+1}\,dx = \int (4x^2 + 6x + 7 + \frac{16x-7}{2x^2-3x+1})\,dx = \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 + 7x + \int \frac{16x-7}{2x^2-3x+1}\,dx$. Essendo poi $2x^2 - 3x + 1 = 2(x-\frac{1}{2})(x-1)$, esistono due costanti A e B tali che $\frac{16x-7}{2x^2-3x+1} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-1} = \frac{2A}{2x-1} + \frac{B}{x-1} = \frac{2(A+B)x-2A-B}{2x^2-3x+1}$, ovvero $2(A + B) = 16$ e $-2A - B = -7$, da cui $A = -1$ e $B = 9$: pertanto $\int \frac{16x-7}{2x^2-3x+1}\,dx = -\int \frac{2}{2x-1}\,dx + 9\int \frac{1}{x-1}\,dx = 9\log|x - 1| - \log|2x - 1|$. Si ha dunque $\int_{-1}^{0} \frac{8x^4+x}{2x^2-3x+1}\,dx = (\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 + 7x + 9\log|x - 1| - \log|2x - 1|]_{-1}^{0} = (0) - (-\frac{4}{3} + 3 - 7 + 9\log 2 - \log 3) = \frac{16}{3} + \log 3 - 9\log 2 \sim 0,2.$

(b) $\boxed{\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,dx}$ Usando il cambio di variabile $t = \sqrt{x}$, ovvero $x = t^2$, da cui $dx = 2t\,dt$, si ottiene $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t} e^{-t} 2t\,dt = 2\int_1^2 (t^2+1)e^{-t}\,dt$. Integrando due volte per parti, si ottiene $\int (t^2+1)e^{-t}\,dt = (t^2 + 1)(-e^{-t}) - \int 2t(-e^{-t})\,dt = -(t^2 + 1)e^{-t} + 2\int te^{-t}\,dt = -(t^2 + 1)e^{-t} + 2(t(-e^{-t}) - \int 1(-e^{-t})\,dt) = -(t^2 + 1)e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + k = -(t^2 + 2t + 3)e^{-t} + k$. Se ne ricava $\int_1^2 (t^2 + 1)e^{-t}\,dt = (-(t^2 + 2t + 3)e^{-t}]_1^2 = -11e^{-2} - (-6e^{-1}) = \frac{6e-11}{e^2}$. Pertanto il nostro integrale iniziale risulta $2\frac{6e-11}{e^2} \sim 1,4$.

(c) $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x-\cos x+1}\,dx}$ Posto $t = \cos x$ (con $dt = -\sin x\,dx$) si ha $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x-\cos x+1}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x-\cos x+1}\,dx = -2\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t^2-t+1}\,dt = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{t^2-t+1}\,dt$. Occupiamoci ora di $\int \frac{t}{t^2-t+1}\,dt = \int \frac{t}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{4}{3}\int \frac{t}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2}))^2+1}\,dt$: con $\tau = \frac{2}{\sqrt{3}}(t - \frac{1}{2})$, da cui $t = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\tau + 1)$ e $dt = \frac{\sqrt{3}}{2}d\tau$, si ha $\frac{4}{3}\int \frac{t}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2}))^2+1}\,dt = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}\tau+1)}{\tau^2+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}d\tau = \int \frac{\tau}{\tau^2+1}\,d\tau + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{\tau^2+1}\,d\tau = \frac{1}{2}\log(\tau^2 + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\,\tau + k$. Quando $t = \frac{1}{2}$ vale $\tau = 0$, e quando $t = 1$ vale $\tau = \frac{\sqrt{3}}{3}$: dunque $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t}{t^2-t+1}\,dt = (\frac{1}{2}\log(\tau^2 + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\,\tau]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = (\frac{1}{2}\log(\frac{1}{3} + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}) - (\frac{1}{2}\log(0 + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\,0) = \frac{1}{2}\log\frac{4}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$. Pertanto il nostro integrale iniziale risulta $\log\frac{4}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 2\log 2 - \log 3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \sim 0,9$.

(d) $\boxed{\int_1^e \frac{\log x}{x\sqrt[3]{\log x+2}}\,dx}$ Notiamo la presenza di x al denominatore, che richiama la derivata di $\log x$. Ponendo dunque $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\,dx$, si ricava $\int_1^e \frac{\log x}{x\sqrt[3]{\log x+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt[3]{t+2}}\,dt$. Ponendo ulteriormente $u = t+2$, da cui $du = dt$, si ricava $\int_2^3 \frac{u-2}{\sqrt[3]{u}}\,du = \int_2^3 \frac{u-2}{\sqrt[3]{u}}\,du = \int_2^3 (\sqrt[3]{u^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{u}})\,du = (\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}} - 3u^{\frac{2}{3}}]_2^3 = (\frac{3}{5}\sqrt[3]{u^2}(u-5)]_2^3 = \frac{3}{5}(3\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4}) \sim 0,36$.

(2) (a) (Vedi Figura 1) La funzione $f(x) = x\log(x + 3)$ ha dominio $x > -3$, si annulla per $x = -2$ e $x = 0$ ed è positiva per $-3 < x < -2$ e per $x > 0$; vale $\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Essa è infinitamente derivabile in ogni punto del dominio; essendo $f'(x) = \log(x+3) + \frac{x}{x+3}$, un facile confronto grafico tra $\log(x+3)$ e $-\frac{x}{x+3}$ mostra che esiste un solo punto $a \in\,]-\frac{3}{2}, -1[$ tale che $f'(x) \geq 0$ per $x \geq a$, dunque $x = a$ è punto di minimo assoluto (con $f(a) = a\log(a + 3) = a(-\frac{a}{a+3}) \sim -0{,}7$); infine si ha $f''(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2} = \frac{x+6}{(x+3)^2}$, che nel dominio è sempre positiva, perciò f è convessa. Poiché f è negativa nell'intervallo di integrazione, l'integrale proposto sarà certamente negativo: integrando per parti, si ha infatti $\int_{-2}^0 x\log(x + 3)\,dx = (\frac{x^2}{2}\log(x + 3)]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 \frac{x^2}{2(x+3)}\,dx = (0) - (0) - \frac{1}{2}\int_{-2}^0 (x - 3 + \frac{9}{x+3})\,dx = -\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - 3x + 9\log|x + 3|]_{-2}^0 = -\frac{1}{2}((9\log 3) - (2 + 6)) = -\frac{9\log 3-8}{2} \sim -0{,}94$.

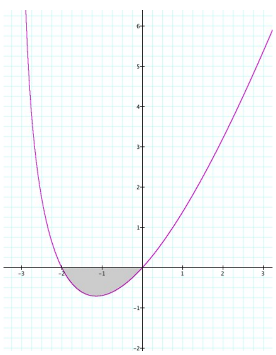
(b) (Vedi Figura 2) La funzione $g(x) = \frac{\sin x}{2\cos x-1}$ ha dominio dato da $\cos x \neq \frac{1}{2}$, ovvero $x \neq \mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; poiché essa è dispari e periodica di periodo 2π, conviene studiarla in $[-\pi, \pi]$ (dunque, per simmetria, in realtà solo in $[0, \pi]$). Si ha $g(x) = 0$ per $x = 0, \pi$; essendo poi $\sin x > 0$ per $0 < x < \pi$ e $2\cos x - 1 > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{3}$, si ha che $g(x) > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{3}$; vale $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}\mp} g(x) = \pm\infty$. Nel dominio la funzione è infinitamente derivabile; essendo la derivata $g'(x) = \frac{2-\cos x}{(2\cos x-1)^2}$ sempre positiva, la funzione è strettamente crescente su ogni intervallo; infine, poiché $g''(x) = \frac{\sin x\,(7-2\cos x)}{(2\cos x-1)^3} = \frac{7-2\cos x}{(2\cos x-1)^2}\,g(x)$, si ha che g è convessa dove è positiva, e ha dunque flessi in $x = 0, \pi$, con $g(0) = g(\pi) = 0$, $g'(0) = 1$ e $g'(\pi) = \frac{1}{3}$. L'integrale $\int_0^a g(x)\,dx$ ha perciò senso se e solo se $-\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{3}$, e vale $\int_0^a \frac{\sin x}{2\cos x-1}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^a \frac{-2\sin x}{2\cos x-1}\,dx = -\frac{1}{2}(\log(2\cos x - 1)]_0^a = -\frac{1}{2}((\log(2\cos a - 1)) - (0)) = -\frac{1}{2}\log(2\cos a - 1)$. (Si noti che il risultato è sempre ≥ 0: infatti per $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ vale $0 < 2\cos a - 1 \leq 1$, dunque $\log(2\cos a - 1) \leq 0$. Guardando la figura, ciò è chiaro se $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$, mentre se $-\frac{\pi}{3} < x < 0$ la funzione è negativa ma si sta integrando a ritroso, dunque il risultato è ancora positivo.)

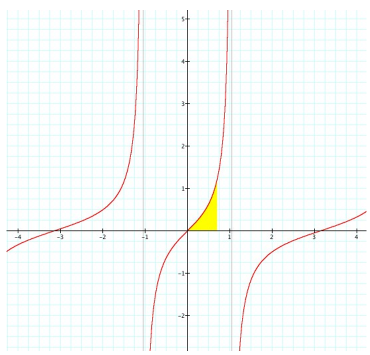
(3) (Vedi Figura 3) Per $\alpha > 0$, l'insieme $U_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\frac{\alpha}{x+1} \leq y \leq \alpha x^2 + \frac{1}{\alpha}\}$ è il tratto della striscia verticale $0 \leq x \leq 1$ compreso tra il tratto di iperbole $y = -\frac{\alpha}{x+1}$ (sotto) e il tratto di parabola $y = \alpha x^2 + \frac{1}{\alpha}$ (sopra). Quando α tende a 0^+ l'iperbole (che ha asintoto verticale $x = -1$) tende ad adagiarsi sull'asse x da sotto,

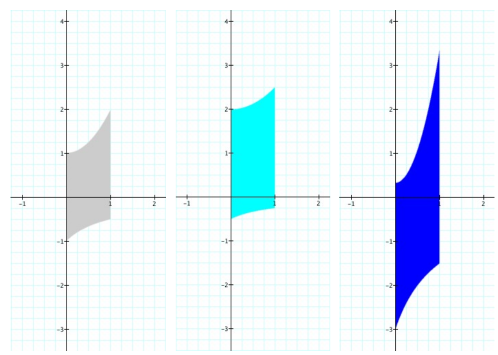
mentre la parabola (con la concavità verso l'alto ed asse coincidente con l'asse delle ordinate) diventa sempre più larga con vertice sempre più in alto; viceversa, mentre α cresce l'iperbole si abbassa, e la parabola diventa sempre più stretta con il vertice che si abbassa avvicinandosi all'origine. L'area di U_α, che ovviamente dipende da α, è dunque $A(\alpha)=\int_0^1(\alpha x^2+\frac{1}{\alpha})\,dx+\int_1^0(-\frac{\alpha}{x+1})\,dx=(\alpha\frac{x^3}{3}+\frac{x}{\alpha}]_0^1+(-\alpha\log|x+1|]_1^0=(\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{\alpha})-(0)+(0)-(-\alpha\log 2)=(\frac{1}{3}+\log 2)\alpha+\frac{1}{\alpha}$. Derivando rispetto a α si ha $A'(\alpha)=\frac{1}{3}+\log 2-\frac{1}{\alpha^2}$, da cui $A'(\alpha)=0$ per $\alpha=\alpha_0:=\sqrt{\frac{3}{1+3\log 2}}$ e $A'(\alpha)>0$ per $\alpha>\alpha_0$: in altre parole l'area diminuisce quando α passa da 0 a α_0 e poi inizia a crescere, dunque diventa minima quando $\alpha=\alpha_0$ (e il suo valore è $A(\alpha_0)=\frac{4}{\alpha_0}$).

(4) (a) $\boxed{S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\le\sin^2 x,\ x\ge 0,\ |x|+|y|\le\pi\}}$ La condizione $|x|+|y|\le\pi$ descrive il rombo centrato nell'origine con vertici $(\pm\pi,0)$ e $(0,\pm\pi)$: pertanto S_1 è la porzione di piano rappresentata nella Figura 4. Se ne ricava che $\mathrm{Area}(S_1)=\int_0^\pi\sin^2 x\,dx+\int_\pi^0(x-\pi)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)\,dx+(\frac{1}{2}x^2-\pi x]_\pi^0=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x]_0^\pi+(0)-(\frac{1}{2}\pi^2-\pi^2)=(\frac{1}{2}\pi)-(0)+\frac{1}{2}\pi^2=\frac{1}{2}\pi(\pi+1)\sim 6,5$.

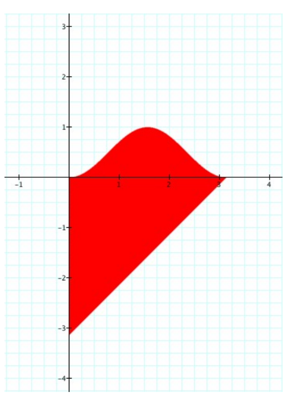
(b) $\boxed{S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \frac{x}{2}-2\le y\le e^{-x},\ y^2+y-2\le x\le 1\}}$ È immediato notare che S_2 è la porzione di piano rappresentata nella Figura 5. Esplicitando la y in funzione di x, la parabola $x=y^2+y-2$ può essere decomposta come grafico di due funzioni $f(x)=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4x+9})$ e $g(x)=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{4x+9})$, definite per $x\ge-\frac{9}{4}$. Si ha allora $\mathrm{Area}(S_2)=\int_{-\frac{9}{4}}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 e^{-x}\,dx+\int_1^0(\frac{x}{2}-2)\,dx+\int_0^{-\frac{9}{4}}g(x)\,dx$. Poiché (ponendo $t=4x+9$) si ha $\int\sqrt{4x+9}\,dx=\frac{1}{4}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{4}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+k=\frac{1}{6}(4x+9)^{\frac{3}{2}}+k$, si calcola $\mathrm{Area}(S_2)=\frac{1}{2}(-x+\frac{1}{6}(4x+9)^{\frac{3}{2}}]_{-\frac{9}{4}}^0+(-e^{-x}]_0^1+(\frac{1}{4}x^2-2x]_1^0+\frac{1}{2}(-x-\frac{1}{6}(4x+9)^{\frac{3}{2}}]_0^{-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}((\frac{9}{2})-(\frac{9}{4}))+((-\frac{1}{e})-(-1))+((0)-(\frac{1}{4}-2))+\frac{1}{2}((\frac{9}{4})-(-\frac{9}{2}))=\frac{29}{4}-\frac{1}{e}\sim 7,25$. La forma di S_2 potrebbe suggerire, in alternativa, di considerare x come funzione di y: le condizioni $\frac{x}{2}-2=y$ e $y=e^{-x}$ danno le funzioni $x=\alpha(y)=2y+4$ e $x=\beta(y)=-\log y$, poi $\alpha(y)=1$ per $y=-\frac{3}{2}$ e $\beta(y)=1$ per $y=\frac{1}{e}$, da cui $\mathrm{Area}(S_2)=\int_{-2}^{-\frac{3}{2}}(2y+4)\,dy+\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{e}}1\,dy+\int_{\frac{1}{e}}^1(-\log y)\,dy+\int_1^{-2}(y^2+y-2)\,dy$. Ricordando (per parti) che $\int\log y\,dy=y(\log y-1)+k$, si ritrova $\mathrm{Area}(S_2)=(y^2+4y]_{-2}^{-\frac{3}{2}}+(y]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{e}}-y(\log y-1)]_{\frac{1}{e}}^1+(\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2-2y]_1^{-2}=(\frac{9}{4}-6)-(4-8)+(\frac{1}{e})-(-\frac{3}{2})-((-1)-(-\frac{2}{e}))+(-\frac{8}{3}+2+4)-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2)=\frac{29}{4}-\frac{1}{e}$.

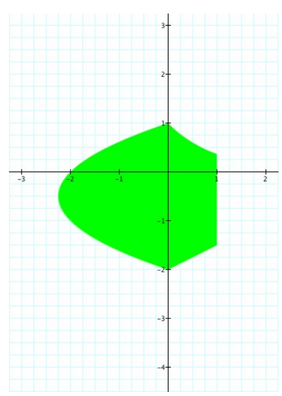






Figg. 1-2 Funzioni e integrali dell'ex. 2. **Figg. 3a-3b-3c** Insieme U_α dell'ex. 3 per $\alpha=\alpha_0$ (grigio, area minima), $\alpha=\frac{1}{2}$ (celeste) e $\alpha=3$ (blu).





Figg. 4-5 Le regioni piane dell'ex. 4.

Auguri di Serene Festività e di un Buon 2009 !