Tensori di curvatura

Riemann: $R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$

operatore di curvatura: $R(X,Y): Z \longmapsto R(X,Y)Z$

tensore di curvatura: $R(X,Y,Z,T) = \langle R(X,Y)Z, T\rangle$ $\quad \langle\, ,\rangle$ metrica riemanniana

in coord: R_{ijkl} $(0,4)$

Ricci:

$$Ric(U,V) = \overset{\text{traccia}}{Tr}\,(W \longmapsto R(U,W)V) \quad \text{operatore di Ricci}$$

$$= \sum_i \langle R(U,e_i)V, e_i\rangle \quad \text{base orto}$$

in coord. locali:

$$R_{ij} = g^{kl} R_{ikjl}$$

Curvatura sezionale (Originaria Riemann)

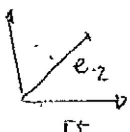
$$\langle R(U,V)U, V\rangle \quad \left(= \text{curv. gaussiana di } exp_p(uU + vV)\right) \ \{\text{vedi oltre}\}$$

è il tensore originariamente definito da Riemann

$\|U\| = \|V\| = 1$

superficie $\quad U \perp V$

$$\left(\underset{Ric(U,U)}{\text{Ricci}} = \sum_{i=1}^{n-1} \text{curv. sezionali} \right)$$



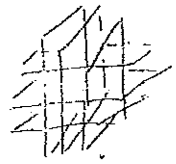
e_n, e_2, $U = e_1$

in coord: $R = g^{ij} R_{ij}$

Curv. scalare $\quad \sum_{i,j} \langle R(e_i e_j) e_i e_j\rangle$

$\Delta \log\lambda \equiv 0$

($\Leftrightarrow \lambda = cost$) in cond. opportune



R descrive l'ostruzione a trovare un sistema di coordinate in cui la metrica è euclidea; (*) ciò è chiaro per la curv. gaussiana, usando coordinate isoterme in dim 2; ma tale ragionamento si può fare per tutte le possibili curv. sezionali ⇒ tali curvature sono tutte nulle ⇔ si ha curv. euclidea su tutte le sup. immerse sono piane; ma in tal caso la metrica è euclidea

(*) (Perché!)

Il tensore di curvatura è effettivamente un tensore:

$$R(fX, gY, hZ, lT) = fghl\, R(X, Y, Z, T)$$

funzioni

Dim: (idea) Si considera: $R(X,Y) : Z \longmapsto R(X,Y)Z := \{\nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]\} Z$

Si usa

$$[fX, gY](\varphi) = fX(gY)(\varphi) - gY(fX)(\varphi)$$

$$= f\left(X(g)Y(\varphi) + g(X(Y(\varphi)))\right)$$

$$- g\left(Y(f)X(\varphi) - f(Y(X(\varphi)))\right)$$

$$= \left(fX(g)Y - gY(f)X + fg[X,Y]\right)(\varphi)$$

$$\boxed{[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X,Y]}$$

assieme alle varie proprietà della connessione di L.C.

Algebricamente, $-R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ rappresenta l'ostruzione a che l'applicazione lineare $X \longrightarrow \nabla_X$ da $\mathcal{X}(M)$ a $End(\mathcal{X}(M))$ sia una rappresentazione (morfismo) di algebre di Lie

Proprietà del tensore di curvatura

i) $R(X,Y,Z,T) = -R(Y,X,Z,T) = -R(X,Y,T,Z)$

(Chiaro) notare

ii) $R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0$

(Id. di Bianchi) (si confondono a convenzioni qualsiasi)

(Si calcola $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y =$

$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ ecc.

$= -([[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y])$
(Jacobi) $= 0$)

iii) $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$

(Segue da i) e ii) ; non è compl. banale)

Teorema
La curvatura sezionale determina il tens. di curvatura!

dim:

$$6\,R(X,Y,Z,T) = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\Big[R(X+\alpha Z,\, Y+\beta T,\, X+\alpha Z,\, Y+\beta T) - R(X+\alpha T,\, Y+\beta Z,\, X+\alpha T,\, Y+\beta Z)\Big]$$

per $\alpha = \beta = 0$ (si usa l'id. di Bianchi)

Qualche dettaglio:

$$\boxed{R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z)}$$

equivale a $\quad R(X,Y,Z,Z) = 0$;

dimostriamo quest'ultima

$$R(X,Y,Z,Z) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z , Z \rangle$$

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle$$

$$\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z \rangle = \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z,Z \rangle \quad \text{(chiaro)}$$

Pertanto

$$R(X,Y,Z,Z) = Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z,Z \rangle$$

$$= \frac{1}{2} Y(X \langle Z,Z \rangle) - \frac{1}{2} X (Y \langle Z,Z \rangle) + \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z,Z \rangle$$

$$= -\frac{1}{2} [X,Y] \langle Z,Z \rangle + \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z,Z \rangle = 0$$

$\square$

$$\boxed{R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)}$$

si parte da Bianchi

$$R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0$$

e si permuta ciclicamente, ottenendo 4 equazioni.

Sommando membro a membro si arriva a

$$2 R(Z,X,Y,T) + 2 R(T,Y,Z,X) = 0$$

$$\Rightarrow \quad R(Z,X,Y,T) = R(Y,T,Z,X)$$

$\square$

☆☆ Tensore di <u>curvatura</u> di <u>Riemann</u> in coordinate locali

$$\nabla_k \equiv \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}$$

$$\underbrace{(\nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k)}_{(1,2)} T^i \overset{(1,2)}{=} - R^i_{qk\ell}\, T^q$$

$$\boxed{\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}}$$

$$\nabla_k(\underbrace{\nabla_\ell T^i}_{(1,1)}) = \nabla_k \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{q\ell} T^q \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{q\ell} T^q \right) + \Gamma^i_{pk} \left(\frac{\partial T^p}{\partial x^\ell} + \Gamma^p_{q\ell} T^q \right)$$

$$- \Gamma^p_{\ell k} \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^p} + \Gamma^i_{qp} T^q \right)$$

si ottiene

$$(\nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k) T^i = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{q\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^\ell} \right) T^q$$

$$+ \left(\Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{q\ell} - \Gamma^i_{p\ell} \Gamma^p_{qk} \right) T^q$$

$$+ \underbrace{\left(\Gamma^p_{\ell k} - \Gamma^p_{k\ell} \right)}_{= 0} \frac{\partial T^i}{\partial x^p}$$

$$-R^i_{qk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{q\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{q\ell} - \Gamma^i_{p\ell} \Gamma^p_{qk}$$

☆ la <u>curvatura</u> di <u>Riemann</u> misura la <u>non commutatività</u> delle derivate covarianti, e rappresenta <u>l'ostruzione</u> a determinare un sistema di coordinate "euclideo" i.e $ds^2 = \sum dy_i^2$

⚠

ciò equivale ad annullare i simboli di Christoffel

☆ intrinsecamente $R(X\,Y\,Z\,W) = \left((-[\nabla_X, \nabla_Y] + \nabla_{[X,Y]}) Z, W \right)$

È possibile, su una varietà Riemanniana, trovare un sistema di coordinate locali tale che

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dy^{i\,2} \qquad \text{(metrica euclidea?)}$$

In generale no: ciò accade se e solo se

$$\boxed{R^i_{qhl} \equiv 0}$$

[se la metrica è euclidea, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^h}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \underbrace{\Gamma^i_{kh}}_{\equiv 0} \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv 0$

⚠ anche se in un dato pto i Γ sono nulli, in generale non sono nulle le derivate!

$$\boxed{\text{se } \dim M \geq 4 \qquad Ric = 0 \not\Rightarrow Riem = 0}$$

Eq. di Einstein ★★★★ (su una varietà pseudo-riemanniana)

energia impulso

costante gravitazionale

$$\boxed{R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}}$$

Ricci | curv. scalare | metrica | vel. della luce nel vuoto | energia impulso

relatività generale: teoria geometrica della gravità

① = ②

"marmo pregiato" "roccia" | "paglia" "legno scadente"

"La relatività generale è il trionfo del calcolo differenziale assoluto di Ricci e Levi-Civita" (A. Einstein)

$$\boxed{R_{ij} = 0}$$

Eq. di Einstein nel vuoto

Riprendiamo la formula

curvatura gaussiana

$$[\nabla_u, \nabla_v]\, \underline{r}_u = K F \underline{r}_u - K E \underline{r}_v$$

$R(X,Y) = -[\nabla_X, \nabla_Y] + \nabla_{[X,Y]}$

usata nel corso di geometria per dimostrare l'Egregium

$$[\nabla_u, \nabla_v]\, \underline{r}_u = K g_{uv} r_u - K g_{uu} r_v$$

assumiamo $F = 0$ per semplicità

$$[\nabla_u, \nabla_v]\, \underline{r}_u = -K g_{uu} r_v$$

$$\langle [\nabla_u, \nabla_v]\underline{r}_u, \underline{r}_v \rangle = -K g_{uu} \langle \underline{r}_v, \underline{r}_v \rangle$$

$$= -K g_{uu} g_{vv}$$

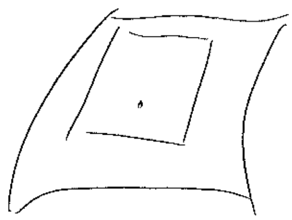
$$-\langle R(\partial_u, \partial_v)\partial_u, \partial_v \rangle = -K g_{uu} g_{vv}$$

se scelgo una base ortonormale (e_{u_1}, e_{v_2}) in un pto

$$\underbrace{-\langle R(e_1, e_2) e_1, e_2 \rangle}_{R_{1212}} = -K \underset{1}{g_{11}}\, \underset{1}{g_{22}} = -K$$

$$\boxed{R_{1212} = K}$$

curv. sezionale

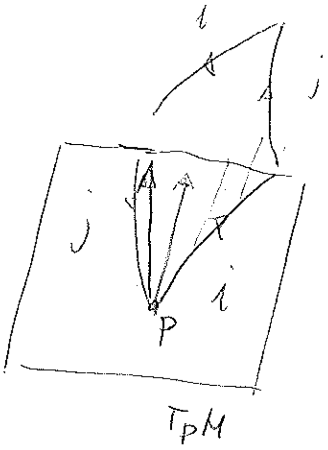


in generale

$$R_{1212} = K(g_{11} g_{22} - g_{12}^2)$$

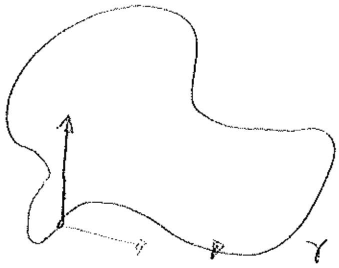
$$(\Rightarrow R_{1212} = eg - f^2)$$

☆☆ <u>Curvatura</u>: misura del trasporto parallelo lungo un "rettangolo infinitesimo" (Levi-Civita)



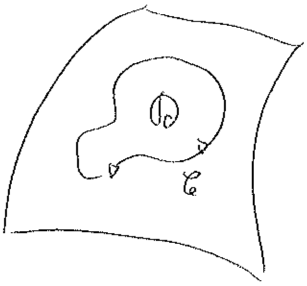
è una matrice

$$\boxed{[\nabla_i, \nabla_j]\, T^k = - R^k_{\ ijl}\, T^l}$$



Versioni globali: "Teoremi di Stokes non abeliani"

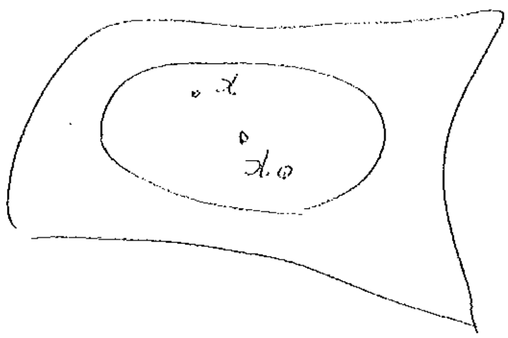
Per le superficie:

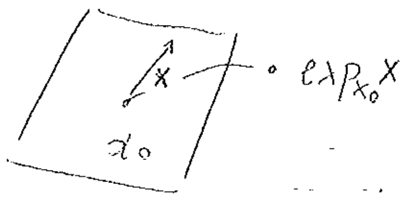


$$\alpha = \iint_{D} K \, d\sigma$$

Metrica in coordinate normali (o geodetiche)

$x \leftrightarrow \exp_{x_0} X$





$$g_{ij}(x) = \underset{\substack{\| \\ g_{ij}(x_0)}}{\delta_{ij}} - \frac{1}{3} \sum_{kl} R_{ikjl}(x_0)\, x^k x^l + \dots$$

tensore di Riemann

---

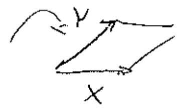
curvatura sezionale in generale.

Siano $X, Y \in T_pM$, sia $\mathrm{span}(X,Y)$ il piano ind. da X e Y (l.i.)

$$\mathcal{K}_p(X,Y) := \frac{R(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

curvatura sezionale

A^2 $\quad$ A: area



se $X = \partial_i$ $\quad Y = \partial_j$

$$\mathcal{K}_{ij} = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2}$$

$$\boxed{R_{ijij} = \mathcal{K}_{ij}(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2)}$$

Se la curvatura sezionale è costante: $\mathcal{K}_{ij} = \mathcal{K}$ e ind. da p

XLIII - 9

$$R_{ijij} = \mathcal{K}(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2)$$

nel caso delle superficie:
se $i = u$ $\quad j = v$ $\rightsquigarrow$ coord. qualsiasi

$$R_{1212} = K(g_{11}g_{22} - g_{ij}^2)$$

$$R_{1212} = K(EG - F^2)$$

si noti che

$$R_{1212} = eg - f^2$$