Il metodo che produce x_n che converge alla radice $\bar{x}$ ha ordine p e costante di errore M se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^p} = M, \qquad M > 0$$

OSSERVAZIONE Se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^p} = 0$$

il metodo ha ordine di convergenza maggiore di p mentre se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^p} = +\infty$$

il metodo ha ordine di convergenza minore di p.

DEF. La radice $\bar{x}$ di $f(x)=0$ ha molteplicità $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$f^{(0)}(\bar{x}) = 0, \dots, f^{(r-1)}(\bar{x}) = 0, \quad f^{(r)}(\bar{x}) \neq 0$$

In questo caso, $f(x)$ si può scrivere come

$$f(x) = (x - \bar{x})^r \cdot h(x)$$

con $h(\bar{x}) \neq 0$.

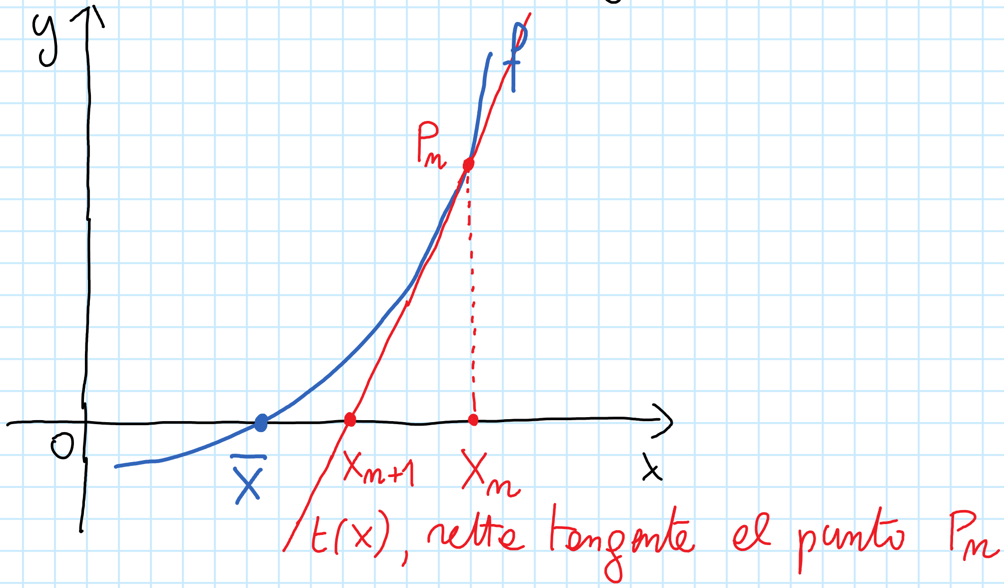
METODO DI NEWTON

La radice $\bar{x}$ di $f(x)=0$ viene approssimata con

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$f'(x_n)$

a partire da un punto iniziale x_0 assegnato.
C'è una semplice interpretazione geometrica



La retta tangente per P è

$$t(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

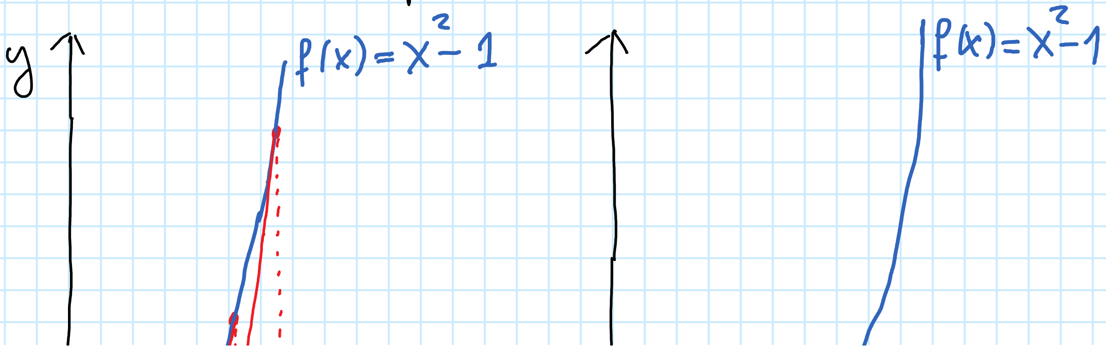
Trovo x_{n+1} imponendo $t(x_{n+1}) = 0$ ossia

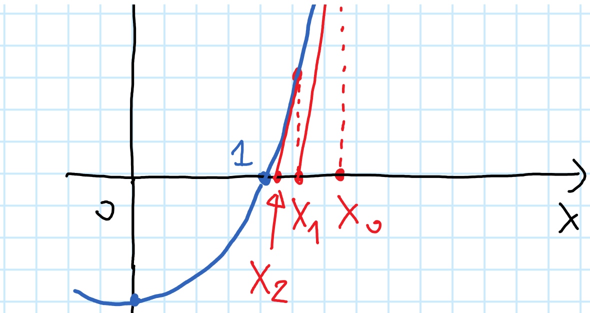
$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \quad (f'(x_n) \neq 0) \implies$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \implies$$

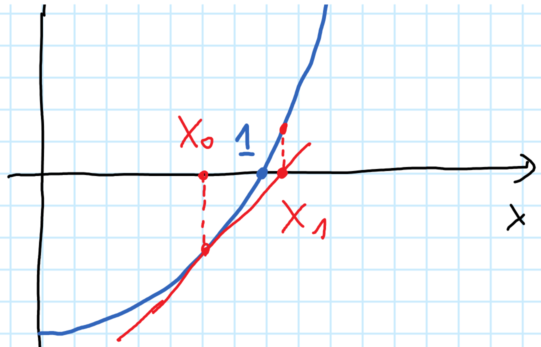
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

L'interpretazione geometrica è molto utile per studiare il comportamento del metodo.



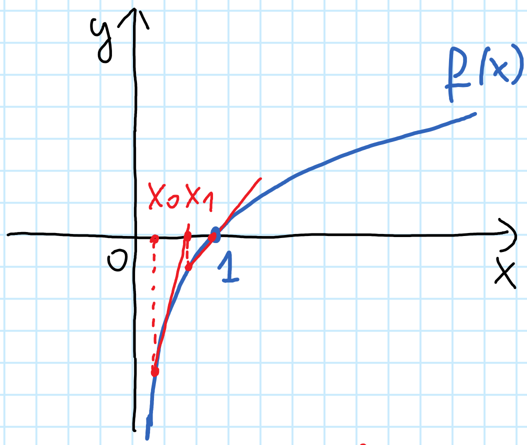


Per $x_0 > 1$, la successione x_n è monotona decrescente ed è $x_n > 1 \quad \forall n$.

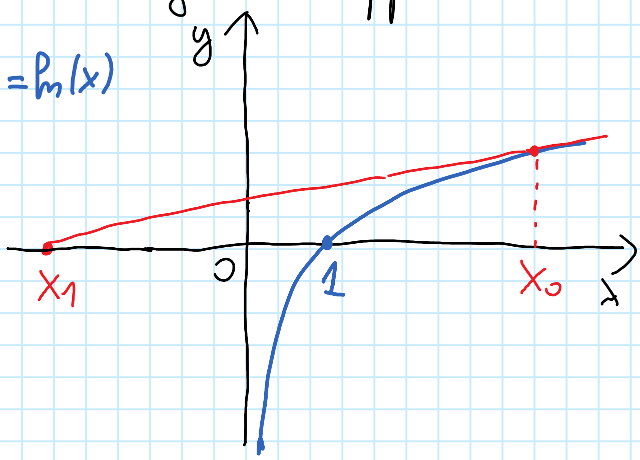


Per $0 < x_0 < 1$ ho $x_1 > 1$ e poi $x_n, n \geq 1$ monotona decrescente.

La costruzione geometrica è di aiuto anche per vedere se, partendo da un certo x_0, il metodo converge ad una data radice $\bar{x}$ che vogliamo approssimare.



Se $0 < x_0 < 1$ la x_n converge a $\bar{x} = 1$ dal basso.



Se $x_0 >> 1$, la x_1 NON cade nel dominio di f! Non posso valutare $f(x_1)$!

È allora interessante trovare dei criteri sotto i quali il metodo converge a $\bar{x}$. Vediamo un esempio di risultato.

TEOREMA Sia f di classe C^2 in un intorno della radice $\bar{x}$. Sia poi $f'(\bar{x}) \neq 0$.
Posto

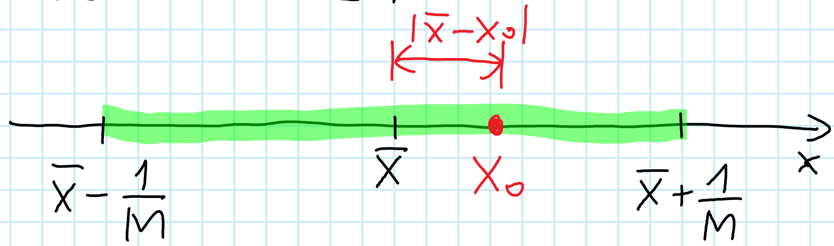
$$M = \frac{1}{2} \, \frac{\max_{x \in I} |f''(x)|}{\max |f'(x)|}$$

$x \in I$

dove I è l'intorno di $\bar{x}$, il metodo di Newton converge a $\bar{x}$ per ogni scelta di x_0 tale che

$$|\bar{x} - x_0| < \frac{1}{M}$$

Notare che la convergenza è garantita se x_0 è abbastanza vicino a $\bar{x}$:



Notare che la convergenza può avvenire anche se x_0 è esterno all'intervallo $\left(\bar{x} - \frac{1}{M}, \bar{x} + \frac{1}{M}\right)$, ma questo il teorema non lo garantisce.

ORDINE DI CONVERGENZA

Sia f di classe C^2 nell'intorno $I(\bar{x}, \delta)$ di $\bar{x}$, radice di f.

Sia $f'(\bar{x}) \neq 0$, ossia $\bar{x}$ è radice semplice.

Supponendo che il metodo di Newton converge per x_0, si ha

$\boxed{p \geq 2}$ (ordine del metodo è almeno 2)

$$M = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right|$$ che vale per $p = 2$.

Ho $p > 2$ quando, fermo restando $f'(\bar{x}) \neq 0$, ho $f''(\bar{x}) = 0$.

Nel caso, invece, in cui $\bar{x}$ abbia molteplicità $r > 1$

(cioè, $f'(\bar{x})=0$) il metodo di Newton ha

$$\boxed{\begin{array}{l} p=1 \\ M = 1-\dfrac{1}{r} \end{array}}$$

In questa situazione si può RIPRISTINARE l'ordine di convergenza $p=2$ con il METODO DI NEWTON MODIFICATO

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - r \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

È $p=2$ e

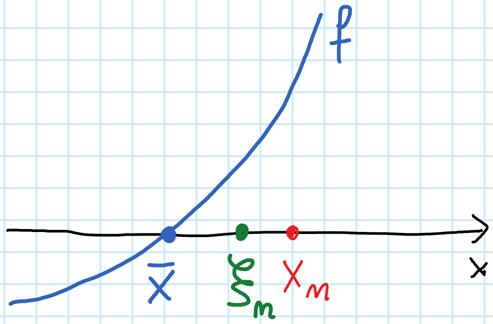
$$M = \frac{1}{r(r+1)} \left| \frac{f^{(r+1)}(\bar{x})}{f^{(r)}(\bar{x})} \right|$$

TEST DI ARRESTO

Nel caso in cui sia $f'(\bar{x}) \neq 0$ un ottimo test di arresto è

$$|x_{n+1} - x_n| < toll$$

dove toll è una tolleranza (numero piccolo, $toll = 10^{-6}$)
Vediamone la giustificazione.



Applicando Lagrange all'intervallo $[\bar{x}, x_n]$ abbiamo

$$\frac{\overbrace{f(\bar{x})}^{=0} - f(x_n)}{\underbrace{\bar{x} - x_n}_{= e_n}} = f'(\xi_n)$$

con ξ_n compreso tra $\bar{x}$ e x_n.

Allora risulta

$$e_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)} = \left(\begin{array}{c} \text{assumiamo} \\ f'(\xi_n) \approx f'(x_n) \end{array} \right) \approx$$

(il metodo di Newton è)

$$\approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(\begin{array}{l}\text{il metodo di Newton è} \\ x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)\end{array}\right)$$

$$= x_{n+1} - x_n$$

ossia, quando siamo vicini alla radice (per avere $f'(\xi_n) = f'(x_n)$) è

$$|\epsilon_n| \approx |x_{n+1} - x_n|.$$

OSSERVAZIONE La relazione $|\epsilon_n| \approx |x_{n+1} - x_n|$ permette di stimare la costante di errore M come rapporto tra scarti consecutivi:

$$M \approx \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^2} \approx \frac{|x_{n+2} - x_{n+1}|}{|x_{n+1} - x_n|^2}.$$

che è utilissimo dal punto di vista pratico (dato che gli errori NON SONO NOTI!).

ESERCIZIO Consideriamo l'equazione $e^x + x = 0$.

a) Quante soluzioni ha? La funzione $f(x) = e^x + x$ è continua, ha

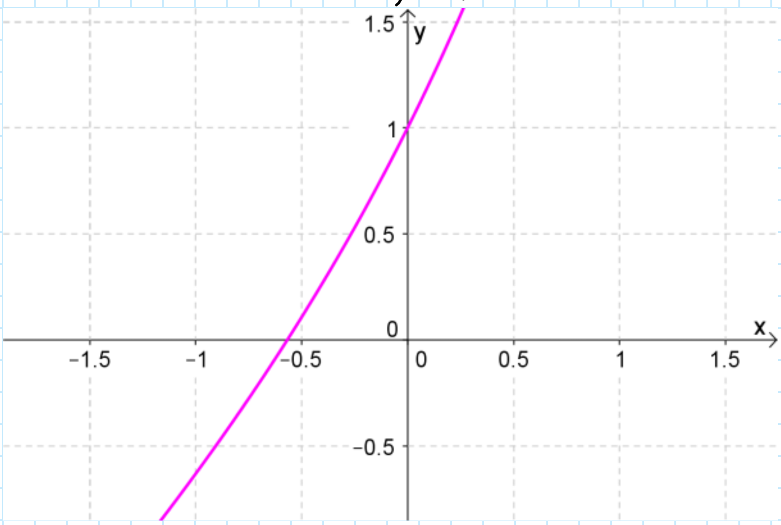
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre, è $f'(x) = e^x + 1 > 0$ per cui f è sempre crescente in senso stretto.
Perciò, (dai limiti) il teorema degli zeri assicura che c'è almeno una soluzione e la monotonia stretta che è unica.
Notare che

$$f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$$

$$f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

e quindi $\bar{x} \in (-1, 0)$.



b) Qual è l'ordine di convergenza del metodo di Newton?

Non conosco $\bar{x}$ ma certamente è $f'(\bar{x}) > 0$ perché

$$f'(\bar{x}) = e^{\bar{x}} + 1 \qquad e \quad e^{\bar{x}} > 0.$$

Quindi, $\bar{x}$ è radice semplice ed il metodo ha ordine di convergenza $p \geq 2$. Dato che

$$f''(\bar{x}) = e^{\bar{x}} \neq 0$$

l'ordine p è esattamente 2.

La costante M vale

$$M = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right| = \frac{1}{2} \frac{e^{\bar{x}}}{e^{\bar{x}} + 1} < \frac{1}{2}$$

c) Scrivere le prime 5 iterazioni del metodo (con la calcolatrice!) partendo da $x_0 = 0$

Si applica ripetutamente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 0 - f(0)/f'(0) = -0{,}5$$
$$x_2 = -0{,}566311003$$
$$x_3 = -0{,}567143165$$
$$x_4 = -0{,}56714329$$
$$x_5 = -0{,}56714329$$

Col valore di x_5 si trova

$$M \cong \frac{1}{2}\left|\frac{f''(x_5)}{f'(x_5)}\right| \approx 0{,}18$$

VARIANTI DEL METODO DI NEWTON

Il più importante è il metodo della

SECANTE VARIABILE

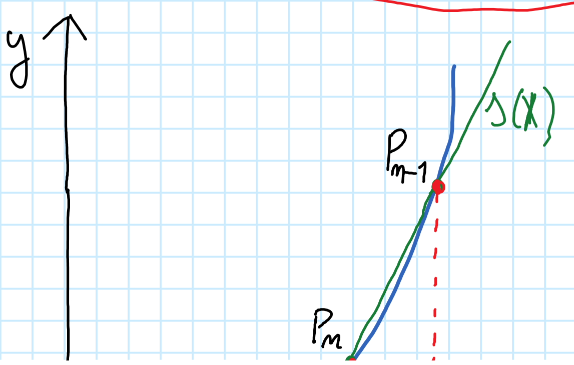
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad , \; n \geq 1$$

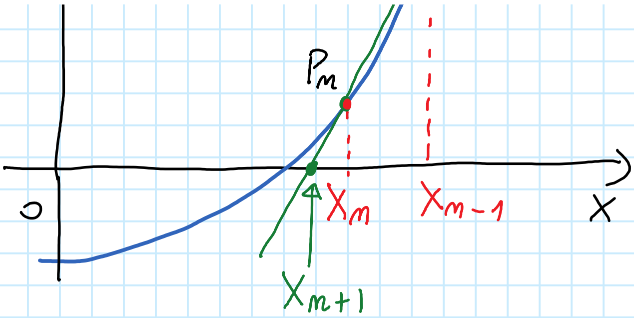
con x_0 e x_1 dati (tipicamente x_1 è ottenuto con un passo del metodo di Newton a partire da x_0).

Osservare che può essere riscritto come

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

approssimo la tangente con la secante





x_{n+1} è lo zero della retta secante passante per P_{n-1} e P_n:

$$s(x) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n) + f(x_n)$$

$s(x_{n+1}) = 0 \implies x_{n+1}$ che è la formula data

È un metodo che, assunto $f'(\bar{x}) \neq 0$ ha

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618 \quad (\Rightarrow \text{superlineare})$$

$$M = \left(\frac{1}{2} \left| \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right| \right)^{0.618}$$

La convergenza è assicurata se x_0 è convenientemente vicino a $\bar{x}$.

TANGENTE FISSA

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \quad , n = 1, 2, 3, \dots$$

È un metodo che ha, $p = 1$, $M = \left| 1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(x_0)} \right|$.

(per cui c'è convergenza se $M < 1$).

ESERCIZIO Quante iterazioni sono richieste al metodo di Newton per avere un errore inferiore a 10^{-6} nel calcolare la radice di $2x-3=0$ partendo da $x_0=100$!

Risposta. Una sola iterazione del metodo di Newton è sufficiente per calcolare <u>esattamente</u> la radice $\bar{x}=3/2$. Basta pensare alla interpretazione geometrica: