NORME INDOTTE (da una norma di vettore)

Sia $\|\cdot\|_v$ una norma di vettore. Poniamo per $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\boxed{\|A\| = \sup_{\substack{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \\ \underline{x}\neq \underline{0}}} \frac{\|A\underline{x}\|_v}{\|\underline{x}\|_v}}$$

Si dimostra che effettivamente definisce una norma di matrice.

OSSERVAZIONE

(•) Sia $A = I_n$, identità di ordine n. Allora è $\|I_n\| = 1$

È infatti

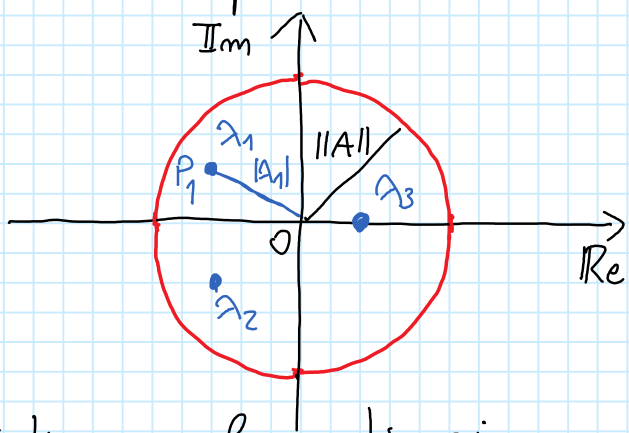
$$\|I_n\| = \sup_{\underline{x}\neq\underline{0}} \frac{\|I_n\cdot\underline{x}\|_v}{\|\underline{x}\|_v} = \sup_{\underline{x}\neq\underline{0}} \frac{\|\underline{x}\|_v}{\|\underline{x}\|_v} = \sup_{\underline{x}\neq\underline{0}} 1 = 1.$$

perché $I_n\underline{x} = \underline{x} \quad \forall\, \underline{x}\in\mathbb{R}^n$.

(•) La norma indotta permette di dare una stima del raggio spettrale di A:

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

per una qualsiasi norma indotta. Questo significa che gli autovalori di A sono all'interno del cerchio del piano complesso di centro O e raggio $\|A\|$:



$|\lambda_1| = \overline{OP_1} \leq \|A\|$ perché

$|\lambda_1| \leq \max\{|\lambda_i|\} = \rho(A) \leq \|A\|$

Vediamone la motivazione.

$$\|A\| = \sup \frac{\|A\underline{x}\|}{\quad} \geq \sup \frac{\|A\underline{x}\|}{\quad} =$$

$$\|A\| = \sup_{\underline{x}\neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \geq \sup_{\underline{x} \text{ autovettore di } A} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} =$$

$$= \sup_{\underline{x} \text{ autovettore di } A} \frac{\|\lambda_i \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \sup_{\underline{x} \text{ autovettore di } A} \frac{|\lambda_i|\cdot \cancel{\|\underline{x}\|}}{\cancel{\|\underline{x}\|}} =$$

$$= \sup\left(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\right) = \rho(A).$$

Alcune delle norme indotte che useremo sono

- $\|A\|_1 = \max\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|, \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|, \dots, \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|\right)$ (NORMA 1)

  1 colonna 2 colonna n esima colonna

- $\|A\|_\infty = \max\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|, \sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|\right)$ (NORMA INFINITO)

  1 riga 2 riga . . . n esima riga

- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A A^T)}$ (NORMA 2 ed è indotta dalla norma 2 di vettore)

ESEMPIO Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\left(|1|+|0|, |-2|+|4|\right) = \max(1, 6) = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max\left(|1|+|-2|, |0|+|4|\right) = \max(3, 4) = 4$$

Per la norma 2 ho

$$A A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$$

(Notare che è simmetrica perché

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$$

(Notare che è simmetrica perché $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$).

Quindi

$$P_{AA^T}(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \left| \begin{pmatrix} 5-\lambda & -8 \\ -8 & 16-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 21\lambda + 16$$

e perciò

$$P_{AA^T}(\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = \frac{21 + \sqrt{377}}{2} \approx 20.208$$

$$\lambda_2 = \frac{21 - \sqrt{377}}{2} \approx 0{,}792$$

Allora

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^T)} = \sqrt{20{,}208} \approx 4{,}495$$

OSSERVAZIONE In Matlab le norme di matrice si calcolano con la function norm( ):

norm(A, 1) $= \|A\|_1$
norm(A, 2) $= \|A\|_2$ (default)
norm(A, 'inf') $= \|A\|_\infty$

NORMA DI FROBENIUS

Non è una norma indotta ma è comoda perché semplice da calcolare.
È definita da

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

In Matlab si ottiene con norm(A, 'fro').
Per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

è

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

e

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2+0^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{21}.$$

NUMERO DI CONDIZIONAMENTO DI UNA MATRICE

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; sia $\|\cdot\|$ una qualsiasi norma indotta.
Si chiama numero di condizionamento di A la quantità

$$\boxed{K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, \quad A \text{ invertibile}}$$

Si pone, inoltre,

$$K(A) = +\infty \quad , \quad A \text{ NON invertibile}.$$

ESEMPIO Sia $A = I_n$. Allora è $I_n^{-1} = I_n$ e $\|I_n\| = 1$. Allora è $K(I_n) = 1 \cdot 1 = 1$.

Il numero di condizionamento soddisfa alle seguenti proprietà

1. $K(A) \geq 1$.

   Infatti

   $$1 = \|I_n\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = K(A).$$

2. $K(A^{-1}) = K(A)$

   Infatti

   $$K(A^{-1}) = \|A^{-1}\| \cdot \|(A^{-1})^{-1}\| = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = \\ = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = K(A).$$

3. $K(\alpha A) = K(A) \quad \forall \alpha \neq 0$.

   Provare a dimostrarlo.

4. A ortogonale (ossia $A^{-1} = A^T$) $\Rightarrow K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 1$.

   Provare a dimostrarlo.

5. A simmetrica definita positiva (ossia $\underline{x}^T A \underline{x} > 0 \ \forall \underline{x} \neq 0$ - Fatto equivalente ad avere TUTTI gli autovalori positivi) Allora

$$K_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

λ_{max} → massimo degli autovalori.

La matrice A si dice BEN CONDIZIONATA se "$K(A)$ è basso" (ad esempio, $K(A) \lesssim 100$); si dice MAL CONDIZIONATA se $K(A)$ è alto (ad esempio, $K(A) \gtrsim 10^4$).

Un esempio di matrice ben condizionata è I_n; la

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-15} \end{pmatrix}$$

è simmetrica, definita positiva ($\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = 10^{-15} > 0$) per cui risulta (punto 5)

$$K_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{1}{10^{-15}} = 10^{15}$$

per cui è mal condizionata.

Un altro esempio di matrici mal condizionate (usate come test proprio per questo) sono le matrici di Hilbert definite da

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

SISTEMI LINEARI.

Ci limitiamo a considerare sistemi lineari quadrati:

$$A \underline{x} = \underline{b} \qquad (1)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ assegnati.

L'obiettivo è calcolare $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Nel caso in cui A sia invertibile, ipotesi che riteniamo sempre valida, la soluzione formale di (1) è

$$\underline{x} = A^{-1} \underline{b}.$$

Vediamo che questa formula NON è applicabile per la risoluzione effettiva di un sistema lineare soprattutto per n grande.

Condizionamento del problema $A\underline{x} = \underline{b}$

Supponiamo di perturbare <u>solo</u> $\underline{b}$. Siano $\underline{x}$ e $\underline{x}+\delta\underline{x}$ le soluzioni esatte di

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$A(\underline{x}+\delta\underline{x}) = \underline{b}+\delta\underline{b}$$

Sottraendo alla seconda la prima si ottiene

$$A\,\delta\underline{x} = \delta\underline{b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta\underline{x} = A^{-1}\,\delta\underline{b}}$$

Passando alle norme (indotte)

$$\|\delta\underline{x}\| = \|A^{-1}\cdot\delta\underline{b}\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\delta\underline{b}\|$$

e dividendo per $\|\underline{x}\|$ (sicuramente è $\|\underline{x}\| \neq 0$ se assumo che sia $\underline{b} \neq \underline{0}$) ho

$$\frac{\|\delta\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{x}\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|/\|A\|} = \underbrace{\boxed{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}}_{=\,\mathbb{K}(A)} \cdot \frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$$

$$\underline{b} = A\underline{x} \Rightarrow \|\underline{b}\| = \|A\underline{x}\| \le \|A\|\cdot\|\underline{x}\|$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}\| \ge \frac{\|\underline{b}\|}{\|A\|}$$

Questa formula indica che la variazione relativa dell'uscita ha un limite superiore legato a $\mathbb{K}(A)$. Perciò, a parità di $\|\delta\underline{b}\|/\|\underline{b}\|$ la variazione di $\|\delta\underline{x}\|/\|\underline{x}\|$ PUÒ essere grande se $\mathbb{K}(A)$ è grande. Diciamo allora che il sistema è BEN CONDIZIONATO se $\mathbb{K}(A)$ è piccolo, MAL CONDIZIONATO se $\mathbb{K}(A)$ è grande.

ESEMPIO Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{pmatrix}$$ con ϵ piccolo.

Si dimostra che $A^{-1} = \frac{1}{\epsilon^2}\begin{pmatrix} 1 & -1+\epsilon \\ -1-\epsilon & 1 \end{pmatrix}$ per cui è

$$K_\infty(A) = \frac{(2+\epsilon)^2}{\epsilon^2} \approx \frac{4}{\epsilon^2} \quad \text{per } 0 < \epsilon << 1.$$

Se $\epsilon = 0.01$ ho $K_\infty(A) \cong 40000$ quindi elevato.
Vediamo cosa comporta a livello pratico nel risolvere $A\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{b}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.99 \\ 2.01 \end{pmatrix}$
$\underline{x}$	$\begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Il numero di condizionamento dipende dalla norma usata ma, se è alto per una data norma è alto anche per le altre (e viceversa).

SOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE CON METODI DIRETTI.

Motivazione. Il metodo di CRAMER è IMPRATICABILE.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \quad k = 1, \dots, n$$

dove A_k ha la k-esima colonna di A sostituita da b.

Si può far vedere che il numero di operazioni richieste per risolvere il sistema è dell'ordine di $(n+1)!$.
Supposto che un'operazione impieghi 10^{-9} s il tempo richiesto per risolvere i seguenti sistemi è

n	$T(n)$
10	0,4 s
15	3 ore

15	3 ore
20	771 anni

E noi dobbiamo risolvere sistemi lineari di ordine $n \simeq 10^4 \div 10^6$!